

Anomale Diffusion in der positiven Säule
im longitudinalen Magnetfeld

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der Doktorwürde
der hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von

Karlheinz Wöhler

aus Berlin

1962

1. Berichterstatter: Professor W. HEISENBERG

2. Berichterstatter: Professor A. SCHLÜTER

Tag der mündlichen Prüfung: 16. Mai 1962

Anomale Diffusion in der positiven Säule im longitudinalen Magnetfeld¹Von K. H. WÖHLER²Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München
und dem Institut für Plasmaphysik, Garching bei München³

(Z. Naturforsch. 17 a, 937–962 [1962]; eingegangen am 6. Juli 1962)



The positive column of a low pressure stationary gas discharge in a longitudinal magnetic field is investigated. Above a critical magnetic field the charged particle losses of the discharge increase rapidly in contradiction to the diffusion theory of the positive column. This effect has become known as LEHNERT-effect. Different theories and hypothesis are investigated and compared with the experiments to explain this phenomenon. It is shown that all experiments are most compatible with a theory of KADOMTSEV which states the anomalous behaviour of the positive column to be a turbulence like instability.

Die vorliegende Arbeit hat das Auftreten einer Anomalie in der diffusionsbeherrschten positiven Säule einer Niederdruck-Gasentladung in einem longitudinalen Magnetfeld zum Gegenstand. Diese Anomalie tritt als Erhöhung der Ladungsträgerverluste zur Wand in Erscheinung und wird als eine durch das Magnetfeld erzeugte Instabilität gedeutet. Die Verhältnisse in einer langen, zylindrischen positiven Säule einer Glimmentladung werden durch das Gleichgewicht zwischen Ladungsträgererzeugung im Volumen und Trägerverlusten zur Wand beherrscht (SCHOTTKY⁴, TONKS und LANGMUIR⁵). Der die Verluste hervorrufoende Mechanismus ist eine Diffusion infolge eines Dichtegefälles der Ladungsträger zur Wand hin, wo sie rekombinieren und die Trägerdichte sehr klein ist. Die Träger werden erzeugt durch Stoßionisation der Elektronen. Die dazu notwendige Energie gewinnen die Elektronen im elektrischen Längsfeld der Entladung, das sich bei konstantem Strom so einstellt, daß die Ionisationsrate, die eine Funktion $Z(T_e(E_z))$ der Elektronenenergie und damit der Feldstärke ist, die Verluste gerade kompensiert. Die elektrische Feldstärke ist also ein Maß für die Diffusionsverluste. Ein longitudinales Magnetfeld behindert die Bewegung der Ladungsträger in transversaler Richtung und vermindert dadurch die Verluste. Der radiale Teilchenfluß I' ist durch den bekannten Ausdruck gegeben:

$$I' = -D_a (\partial n / \partial r), \quad (1)$$

wobei n die Teilchendichte ist und D_a der ambipolare Diffusionskoeffizient, der für hohe Magnetfelder B proportional mit $1/B^2$ ist.

Im Rahmen der Anstrengungen zur kontrollierten Fusion gewann das Verhalten von Ladungsträgern in Magnetfeldern in den letzten Jahren besonderes Interesse. BICKERTON und ENGEL⁶ haben 1956 die Diffusion in der positiven Säule in longitudinalen Magnetfeldern bis zu 400 Gauß untersucht. In Druckbereichen, in denen die freie Weglänge der Ionen klein ist, verglichen mit dem Rohrradius, fanden sie gute Übereinstimmung mit der Theorie. Von LEHNERT⁷ wurden diese Untersuchungen auf höhere magnetische Feldstärken ausgedehnt, und dabei zeigte sich die Anomalie. LEHNERT fand:

a) Mit zunehmendem Magnetfeld nehmen die Teilchenverluste der Entladung ab, entsprechend der Theorie der ambipolaren Diffusion, solange die magnetische Feldstärke unter einem gewissen kritischen Wert B_c bleibt. Oberhalb B_c steigen die Verluste mit zunehmendem Magnetfeld an.

b) Mit zunehmendem Gasdruck nimmt die kritische magnetische Feldstärke zu.

c) Für höhere Ionenmassen ist die kritische magnetische Feldstärke höher, mit einer charakteristischen Ausnahme, nämlich bei Stickstoff als Füllgas. Die kritische magnetische Feldstärke für Stickstoff liegt unter derjenigen für Wasserstoff.

¹ Dissertation der naturwissenschaftlichen Fakultät der Ludwig-Maximilians-Universität, München.

² z. Zt. US-Naval Postgraduate School Monterey, California, U.S.A.

³ Die Arbeit wurde im Rahmen des Vertrags zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH. und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiet der Plasmaphysik durchgeführt.

⁴ I. V. SCHOTTKY, Phys. Z. 25, 635 [1924].

⁵ L. TONKS u. I. LANGMUIR, Phys. Rev. 34/2, 876 [1929].

⁶ R. J. BICKERTON u. A. v. ENGEL, Proc. Phys. Soc., Lond. B 69, 468 [1956].

⁷ B. LEHNERT, Proc. 2. Int. Conf. Peaceful Use of Atomic Energy, Geneva 1958. UN Geneva 1958, Vol. 32, p. 349.

d) Mit zunehmendem Radius des Entladungsrohrs verschiebt sich die kritische magnetische Feldstärke zu niedrigeren Werten.

e) Bei Erreichen der kritischen magnetischen Feldstärke wird ein sprunghafter Anstieg des Rauschens aus der Entladung beobachtet. Der Hauptanteil des Spektrums kommt dabei aus dem Gebiet um 10 kHz.

f) Die kritische magnetische Feldstärke ist in einem weiten Bereich praktisch nicht abhängig vom Entladungsstrom, d. h. vom Absolutbetrag der Trägerdichte in der Entladungsachse (vgl. LEHNERT und HOH^{8,9}, EKMAN, HOH und LEHNERT¹⁰).

Wegen der Bedeutung dieses Phänomens für die Untersuchung der Frage, welche Instabilitäten im Plasma durch ein Magnetfeld erzeugt werden können, wurden ähnliche Experimente von einer Gruppe der University of California in Berkeley (vgl. ALLEN et al.¹¹⁻¹⁴, PAULIKAS und PYLE¹⁵) und im Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik in München durchgeführt. Es wurden verschiedene Vorstellungen und Theorien entwickelt, die die experimentellen Ergebnisse erklären könnten. Von HOH¹⁶ wurde ein von BOHM¹⁷ angegebenes Kriterium für die Existenz einer stabilen Grenzschicht mit den Randbedingungen in der Theorie der positiven Säule verknüpft, was auf eine kritische magnetische Feldstärke führt, oberhalb derer eine stabile Grenzschicht nicht mehr existieren kann. Eine von KADOMTSEV und NEDOSPASOV¹⁸ veröffentlichte Theorie deutet das Phänomen als eine Art Turbulenz, und es wird dort ein Kriterium abgeleitet für Stabilität der Entladung gegenüber einer kleinen Störung, die oberhalb einer kritischen magnetischen Feldstärke zur Turbulenz anwachsen kann.

In der vorliegenden Arbeit werden die verschiedenen Deutungsversuche des Phänomens mit experimentellen Ergebnissen verglichen, die mit einer experimentellen Anordnung, ähnlich derjenigen von LEHNERT, erhalten wurden. Es wurde untersucht, ob ein Zusammenhang besteht zwischen der kritischen

magnetischen Feldstärke und einem Umschlagen der radialen elektrischen Feldstärke, dem „Kurzschlußeffekt“ bei Verletzung der Zylindersymmetrie, einer möglichen Ionenwelleninstabilität oder einer durch Run-away-Elektronen hervorgerufenen Instabilität, und es wurden die Meßergebnisse mit der Hohen Theorie verglichen. Insbesondere wurde versucht, die Turbulenztheorie von KADOMTSEV zu unterstützen. Durch Einführung einer zusätzlichen HF-Ionisierung wurde ein gemischter Entladungstyp geschaffen, der bei gleichem Entladungsstrom eine geringere axiale elektrische Feldstärke erfordert. Der Einfluß dieser Verringerung der axialen elektrischen Feldstärke auf die kritische magnetische Feldstärke wurde untersucht. Weiter wurde der Einfluß eines zusätzlichen magnetischen Azimutalfeldes, das durch einen axialen isolierten Stromleiter erzeugt wurde, auf die Verluste und die kritische magnetische Feldstärke untersucht. Zum Vergleich dieser Experimente mit der Theorie war eine Erweiterung der Stabilitätsbetrachtung im Rahmen der Turbulenztheorie notwendig, die ebenfalls Bestandteil dieser Arbeit ist.

I. Experimentelle Anordnung

1. *Die Entladung.* Das eigentliche Entladungsgefäß war ein Glasrohr von 260 cm Länge und 6 cm innerem Durchmesser. Als Kathode wurde eine Glühkathode benutzt. In der Mitte des Entladungsrohres befanden sich Stützen mit Vakuumdurchführungen zur Durchführung radial beweglicher Sonden. Im Abstand von 1 m symmetrisch zur Rohrmitte waren Zylindersonden zur Messung der axialen elektrischen Feldstärke eingebaut (Abb. 1).

Das Pumpsystem konnte mittels eines Ventils vom Entladungsgefäß abgesperrt werden. Der Arbeitsdruck des Füllgases wurde dann mittels eines Dosierventils eingestellt. Der Enddruck, auf den das Entladungsgefäß vor Beginn einer Meßreihe evakuiert wurde, betrug 2 bis $3 \cdot 10^{-5}$ Torr. Nach längeren Betriebspausen wurde vor Beginn einer neuen Versuchsreihe die Entladung bei höherem Strom mehrere Stunden gebrannt, um die Rohrwände zu reinigen. Der Arbeitsdruck wurde

⁸ B. LEHNERT u. F. C. HOH, Proc. 4. Int. Conf. Ionization Phenomena in Gases, Uppsala, North-Holland Publishing Comp., Amsterdam 1960, Vol. 2, 604.

⁹ B. LEHNERT u. F. C. HOH, Phys. Fluids 3, 600 [1960].

¹⁰ C. EKMAN, F. C. HOH u. B. LEHNERT, Phys. Fluids 3, 833 [1960].

¹¹ T. K. ALLEN, G. A. PAULIKAS u. R. V. PYLE, Bull. Amer. Phys. Soc. 5, 314 [1960].

¹² T. K. ALLEN, M. C. HORTON, G. A. PAULIKAS, R. V. PYLE u. F. VOELKER, UCRL-Rep. 8887 [1956].

¹³ T. K. ALLEN, M. C. HORTON, G. A. PAULIKAS, R. V. PYLE, H. F. RUGGE, J. W. STEORNS u. F. VOELKER, UCRL-Rep.

9002 [1959]. — T. K. ALLEN, G. A. PAULIKAS u. R. V. PYLE, UCRL-Rep. 9110 [1960].

¹⁴ T. K. ALLEN, G. A. PAULIKAS u. R. V. PYLE, Phys. Rev. Letters 5, 409 [1960].

¹⁵ G. A. PAULIKAS u. R. V. PYLE, UCRL-Rep. 9682 [1961].

¹⁶ F. C. HOH, Phys. Rev. Letters 4, 559 [1960].

¹⁷ D. BOHM, The Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Fields (Guthrie and Wakerling), McGraw-Hill, New York 1959, Kap. 1 und 2.

¹⁸ B. B. KADOMTSEV u. A. V. NEDOSPASOV, J. Nucl. Energy 1, 230 [1960].

mit einem LKB-PIRANI-Gerät bestimmt, das unter den vorliegenden Bedingungen eine Genauigkeit von etwa 20% hat.

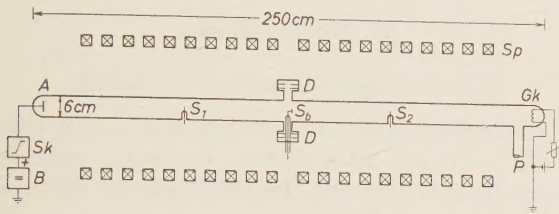


Abb. 1. Experimentelle Anordnung. A Anode, Gk Glühkathode, P Pumpstutzen zum Pumpsystem und Gaseinlaß, Sk Elektronischer Stromregler, B Spannungsquelle, D Schleusen zur Durchföhrung radial beweglicher Sonden, Sb Radial bewegliche Flächensonde, S₁, S₂ Zylindersonden zur Messung der elektrischen Feldstärke, Sp Magnetfeldspulen.

Als Vorschaltwiderstand für den Entladungskreis diente ein elektronischer Stromregler. Die Stromkonstanz betrug 10^{-5} A/V. Der Regler sollte die Spannungsänderung aufnehmen, die bei Änderung der magnetischen Feldstärke über der Entladung entsteht, so daß die Spannungsquelle nicht manuell nachgeregelt werden mußte und die interessierenden Größen in Abhängigkeit vom Magnetfeld direkt registriert werden konnten.

Das ganze Entladungsrohr befand sich in der Achse eines 170 cm langen Solenoids von 30 cm innerem Durchmesser. Im stationären Betrieb konnte eine maximale magnetische Feldstärke von 1500 Gauß erzeugt werden.

2. *Versuchsanordnung mit zusätzlicher HF-Ionisierung.* Um die Ladungsträgererzeugung, die von den im axialen elektrischen Feld beschleunigten Elektronen besorgt wird, teilweise durch eine Fremdionisierung ersetzen und dadurch das erforderliche elektrische Feld reduzieren zu können, wurde das ganze Entladungsrohr mit einer Spule von 20 Windungen/m umgeben, die induktiv über einen Luftübertrager an einen HF-Sender mit der Frequenz 4 MHz und einer variierbaren Ausgangsleistung bis zu 2 kW angekoppelt war. Die mit dieser Anordnung in das Plasma einkoppelbare Leistung reichte aus, die gesamten Trägerverluste der Entladung durch HF-Ionisation zu decken, d. h. die elektrische Feldstärke bis zu sehr kleinen Werten zu reduzieren (Abb. 2).

3. *Versuchsanordnung mit zusätzlichem magnetischem Azimutalfeld.* Um die Diffusion der Ladungsträger durch ein zusätzliches magnetisches Azimutalfeld beeinflussen zu können, wurde in der Achse eines sonst gleichen Entladungsrohres ein mit einem Glasrohr von 10 mm äußerem Durchmesser isolierter, wassergekühlter Kupferleiter angebracht, der bis 600 A belastet werden konnte. Dieser erzeugte ein je nach Stromrichtung orientiertes magnetisches Azimutalfeld, das wie $1/r$

nach außen schwächer wurde und an der Wand des Entladungsrohres eine maximale Feldstärke von ca. 40 Gauß ergab (Abb. 3).

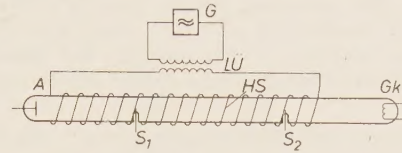


Abb. 2. Anordnung mit zusätzlicher HF-Ionisierung.



Abb. 3. Anordnung mit zusätzlichem magnetischem Azimutalfeld.

A Anode, Gk Glühkathode, G HF-Generator $f = 4$ MHz, LÜ Luftübertrager, HS Spule zur Übertragung der HF-Leistung auf das Plasma, L Wassergekühltes Kupferrohr als Leiter zur Erzeugung des magnetischen Azimutalfeldes, I Glasisolierung für den Kupferleiter, S₁, S₂ Zylindersonden zur Messung der elektrischen Axialfeldstärke.

4. *Messung der axialen elektrischen Feldstärke.* Als Meßgröße zur Bestimmung der Verluste und das Einsetzen der Anomalie diente die axiale elektrische Feldstärke. Diese wurde bestimmt aus der Potentialdifferenz zwischen zwei Zylindersonden in der Rohrachse in 1 m Abstand voneinander, die sich auf dem sogenannten „Floating-Potential“ oder „Schwimm-Potential“ befanden. Diese Potentialdifferenz wurde als Funktion des Magnetfeldes oszillographisch registriert. Die Genauigkeit der Methode hängt im wesentlichen von der Genauigkeit ab, mit der bei Variation des Magnetfeldes die Grenzsichtpotentialdifferenzen der beiden Sonden gleich sind. Für diese liefert die Theorie der Sonden (vgl. GRANOWSKI¹⁹) eine Abschätzung. Daraus ergibt sich für die Messung im vorliegenden Fall ein möglicher Fehler von weniger als 10%.

5. *Messung der Rauschamplitude.* Als zweite Anzeige für das Einsetzen der Instabilität wurde die Rauschamplitude als Funktion des Magnetfeldes aufgezeichnet. Dazu wurde das Floating-Potential einer Sonde über einen Blockkondensator direkt auf einen Verstärkereingang eines Oszillographen geführt, dessen Horizontalauslenkung proportional dem Magnetfeld war.

6. *Messung der Radialfeldstärke.* Zur Messung der radialen Potentialverteilung wurden zwei voneinander isolierte Flächensonden von 2 mm Durchmesser auf einer gemeinsamen Führung im Abstand von 1 cm in gleicher Richtung orientiert angebracht und radial verschiebbar in die Entladung eingeföhrt. Bei der Messung wurden die Sondenflächen senkrecht zum Magnetfeld zur Kathode hin gerichtet. Die Differenz ihrer Floating-Potentiale wurde in Abhängigkeit vom Magnetfeld gemessen und registriert. Durch Verschieben der Sonden wurde die radiale Potentialverteilung aufgenommen. Da diese nur Änderungen von wenigen Volt aufweist, hängt der Fehler bei dieser Messung sehr kritisch davon ab,

¹⁹ W. L. GRANOWSKI, Der elektrische Strom im Gas, Akademie-Verlag, Berlin 1955.

daß die Grenzsichten für beide Sonden wirklich die gleichen Potentialdifferenzen haben und daß die Elektronentemperatur keinen Gradienten in radialer Richtung hat. Für genügend kleine freie Weglängen der Ionen, d. h. Gasdrucken $p > 10^{-1}$ Torr, sind diese Bedingungen hinreichend gut erfüllt. Bei niedrigeren Drucken kann es beträchtliche Fehler geben (vgl. auch ECKER²⁰).

7. *Messung der Elektronentemperatur.* Die Elektronentemperatur wurde aus dem Anstieg des positiven Astes der Sondenkennlinie bestimmt. Es wurde dazu eine Flächen-sonde in senkrechter Orientierung zum Magnetfeld verwendet. Die Genauigkeit dieser Bestimmung der Elektronentemperatur ist aus mehreren Gründen nicht sehr groß:

a) Der Einfluß eines starken Magnetfeldes auf die Sondencharakteristik ist nicht genügend bekannt.

b) In dem hier untersuchten Druckbereich von 10^{-1} bis 1 Torr weist die Säule stets eine mehr oder weniger vom Magnetfeld abhängige ausgeprägte Schichtung auf. Durch diese werden Fluktuationen im Plasma und damit Schwankungen des Potentials am Sondenort bedingt. Wenn man diese Schwingungen im Meßkreis aussiebt, mißt man eine verzerrte Charakteristik, die im allgemeinen eine zu hohe Elektronentemperatur vortäuscht. Eine Abschätzung wiederum mit Hilfe der Sonden- theorie ergibt einen relativen Fehler $\Delta T_e/T_e$ von etwa 10% pro Volt Potentialfluktuation am Sondenort.

Bei zusätzlicher HF-Ionisierung erwies sich diese Methode der Temperaturbestimmung als völlig ungeeignet, da Fluktuationen bis zu 10 Volt auftraten. In diesem Fall wurde versucht, die Temperatur aus einer Doppelsondenmessung zu bestimmen (vgl. dazu JOHNSON und MALTER²¹). Schwankungen des Plasmapotentials am Sondenort gehen in diese Messung kaum noch ein, da die Potentialdifferenz zwischen den eng beieinander liegenden Sonden im stromlosen Zustand kleiner als 1 Volt war. Die Methode hat aber den Nachteil, daß zur Temperaturbestimmung nur der schnelle Schwanz der Elektronenverteilung wirklich gemessen und als Grundlage der Temperaturbestimmung genommen wird. Wenn es neben der MAXWELL-Verteilung eine Gruppe schneller Elektronen gibt, dann wird also von diesen auf die Gesamtverteilung geschlossen, und die Temperatur wird zu hoch bestimmt. Dieser Fehler läßt sich nicht abschätzen, solange nichts über die wahre Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen bekannt ist. Es ist versucht worden, die Geschwindigkeitsverteilung direkt zu messen²². Ohne HF-Ionisierung konnte die Verteilung bei verschiedenen Magnetfeldern zwar gemessen werden, lieferte aber keine eindeutigen Ergebnisse. Wahrscheinlich störte die Driftkomponente und die

Schichtung. Mit HF-Ionisierung war die Messung wegen der hohen Störeffindlichkeit solcher Einrichtungen unmöglich²⁵.

II. Meßergebnisse

1. Die kritische magnetische Feldstärke

Die Abhängigkeit der axialen elektrischen Feldstärke von der magnetischen Feldstärke zeigt in einem typischen Beispiel das Oszillogramm Abb. 4 a.

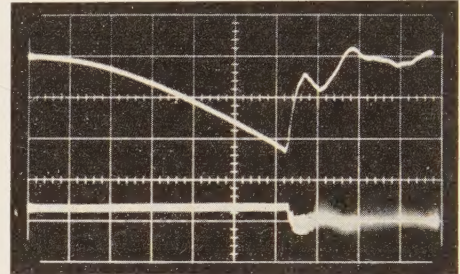


Abb. 4 a. Axiale elektrische Feldstärke in Abhängigkeit von der magnetischen Feldstärke. Gas: He, $p=1,0$ Torr, $B_c=960$ G; 1. Spur: Abszisse: 150 G/SkT, Ordinate: 20 V/m SkT, Nullpunkt: 590 V/m; 2. Spur: Rauschamplitude gegen magnetische Feldstärke.

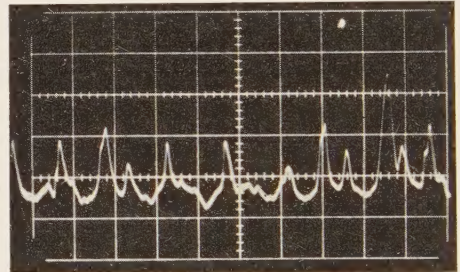


Abb. 4 b. Rauschamplitude zeitaufgelöst. Gas: He, $p=1,0$ Torr, $B=1120$ G; $B_c=960$ G; Abszisse: 0,2 ms/SkT, Ordinate: 5 V/SkT.

Man erkennt, wie die elektrische Feldstärke an der kritischen Stelle fast sprunghaft ansteigt und wie gleichzeitig das Anwachsen der Rauschamplitude einsetzt. Bei niedrigeren Gasdrucken ist der Knickpunkt meist nicht mehr so scharf ausgeprägt.

Das Rauschen wurde mit einer Sonde in der Nähe der Wand aufgenommen. Die Spitzen entsprechen einer Folgefrequenz von ca. 5 kHz.

²⁰ G. ECKER, K. S. MASTERTON u. J. H. McCLURE, Proc. 5. Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, Munich 1961, 1406, North Holland Publishing Comp., Amsterdam 1962.

²¹ E. O. JOHNSON u. L. MALTER, Phys. Rev. **80**, 58 [1950].

²² Die Geschwindigkeitsverteilung kann aus der Krümmung der Kennlinie ermittelt werden (SLOANE und GREGOR²³, BOYD und TWIDDY²⁴).

²³ R. H. SLOANE u. E. J. R. MACGREGOR, Phil. Mag. **18**, 193 [1934].

²⁴ R. L. F. BOYD u. N. D. TWIDDY, Proc. Roy. Soc., Lond. A **250**, 53 [1959].

²⁵ Diese Messungen wurden mit einer von Herrn G. MÜLLER im Max-Planck-Institut entwickelten Meßeinrichtung vorgenommen.

Die Abhängigkeit der kritischen magnetischen Feldstärke B_c vom Gasdruck zeigt Abb. 5 (alle Messungen beziehen sich auf He als Füllgas). Die Meß-

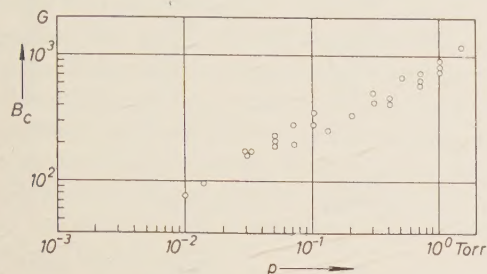


Abb. 5. Kritische magnetische Feldstärke in Abhängigkeit vom Gasdruck. Gas: He, $R=3$ cm.

punkte streuen etwa 20% um den Mittelwert. Diese Streuung rührt von den Fehlern bei der Druckmessung her*. Einen Vergleich der gemessenen Werte B_c/p mit den entsprechenden Werten bei ALLEN¹² und bei LEHNERT und HOH⁸ gibt die Abb. 6, woraus hervorgeht, wie die kritische magnetische Feldstärke vom Rohrradius abhängt.

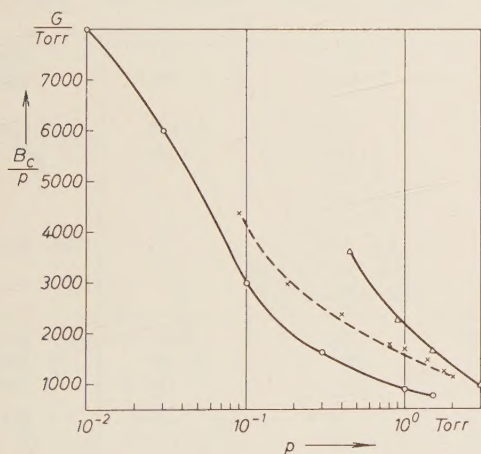


Abb. 6. Verhältnis B_c/p in Abhängigkeit vom Gasdruck (He); Vergleich mit anderen Autoren. Δ Werte von HOH ($R=0,5$ cm); $\times$ Werte von ALLEN ($R=1$ cm); $\circ$ Werte von WÖHLER ($R=3$ cm); (R = Rohrradius).

2. Die radiale Potentialverteilung

Die radialen Potentialverteilungen in der Entladung bei verschiedenen magnetischen Feldstärken und Gasdrucken sind in den Abb. 7 dargestellt. Man sieht, daß bei Gasdrucken höher als $3 \cdot 10^{-1}$ Torr ein Umschlag der radialen elektrischen Feldstärke nicht beobachtet wird, d. h. auch bei höheren magnetischen

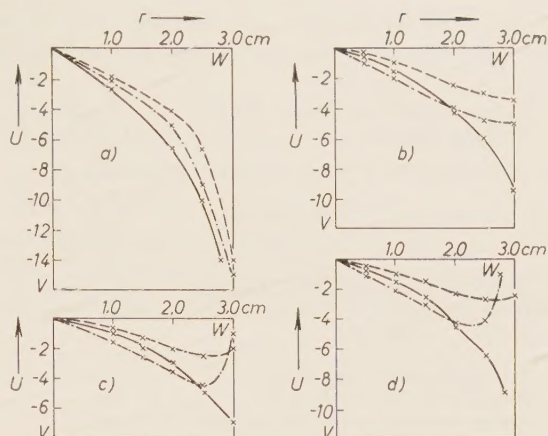


Abb. 7. Radiale Potentialverteilung für verschiedene magnetische Feldstärken und Gasdrücke, W = Wand.

	p	$\bar{B}$	$\bar{B} = B_c$	$\bar{B}$
a)	1 Torr	0 G	1000 G	1250 G
b)	$3 \cdot 10^{-1}$	0	500	1250
c)	10^{-1}	0	310	1000
d)	$3 \cdot 10^{-2}$	0	180	600

Feldstärken ist die Diffusion der Elektronen zur Wand schneller als die der Ionen, die Säule behält eine schwache positive Raumladung. Bei niedrigeren Gasdrucken wurde ein Umschlag der radialen elektrischen Feldstärke beobachtet. Der Umschlagpunkt liegt in der Nähe der Rohrwand. Man könnte annehmen, daß dort die Sondenmessung durch die Grenzschicht der Wand schon stark gestört ist. Aber zumindest für Gasdrücke bis herunter zu 10^{-1} Torr ist die freie Weglänge der Ionen noch kleiner als 1 mm. Damit ist die Ausdehnung der Grenzschicht, die etwa von der Größenordnung der freien Weglänge der Ionen ist, so klein, daß dieser Feldumschlag als tatsächlich vorhanden angenommen werden muß (vgl. auch ALLEN et al.^{12, 13}).

3. Die Elektronentemperatur

Die Ergebnisse der Elektronentemperaturbestimmung (siehe Tab. 1) sind in guter Übereinstimmung mit den von anderen Autoren bestimmten Temperaturen in He-Entladungen (vgl. etwa BICKERTON und v. ENGEL⁶).

Die Temperaturmessungen bei zusätzlicher HF-Ionisierung sind sehr zweifelhaft. Bereits bei schwacher HF-Leistungseinkoppelung in die Entladung wurde die Temperatur zu 15 bis 20 eV bestimmt. Es erscheint ganz unwahrscheinlich, daß mit gering-

* Zusatz b. d. Korr.: Der Grad der Verunreinigung der Entladung scheint ebenso beizutragen.

ger HF-Leistung die Elektronentemperatur um einen Faktor 3 bis 4 erhöht werden könnte, derart, daß die Elektronen noch eine der MAXWELL-Verteilung ähnliche Verteilungsfunktion haben. Vielmehr ist zu vermuten, daß durch die HF-Leistung eine Gruppe schneller Elektronen erzeugt wird, die gerade bei der Doppelsondenmessung erfaßt wird und die die hohe Temperatur vortäuscht. Man wird wohl eher annehmen dürfen, daß durch die Hochfrequenz die Elektronentemperatur nur wenig verändert wird, weil diese im wesentlichen durch die Trägerverluste an der Wand bestimmt ist.

4. Die kritische magnetische Feldstärke bei zusätzlicher HF-Ionisierung

Die Abhängigkeit der kritischen magnetischen Feldstärke von der mittels der zusätzlichen HF-Ionisierung variierbaren axialen elektrischen Feldstärke bei verschiedenen Gasdrücken ist in Abb. 8 dargestellt. Mit zunehmender HF-Ionisierung, d. h. abnehmender elektrischer Feldstärke, zeigt sich deutlich eine starke stabilisierende Wirkung. Dieser Versuch

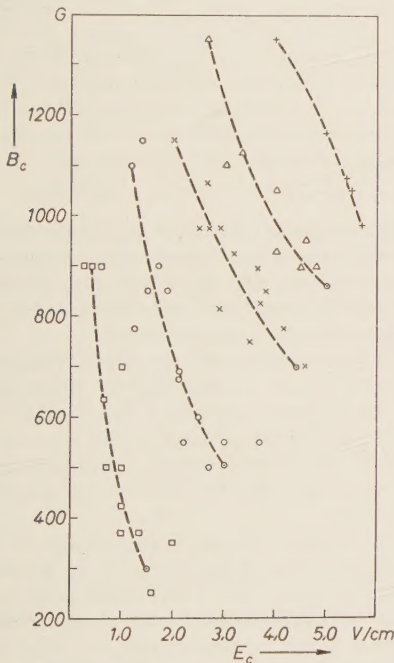


Abb. 8. Kritische Magnetfeldstärke bei zusätzlicher HF-Ionisierung in Abhängigkeit von der elektrischen Axialfeldstärke beim kritischen Punkt für verschiedene Gasdrücke.

Meßwerte	+	△	×	○	□
p (Torr)	1,3	$9 \cdot 10^{-1}$	$7 \cdot 10^{-1}$	$3,7 \cdot 10^{-1}$	10^{-1}

○ kritische Punkte ohne HF.

zeigt, daß jedenfalls das elektrische Feld an der Entstehung der Instabilität maßgebend beteiligt sein muß.

5. Die kritische magnetische Feldstärke bei zusätzlichem magnetischem Azimutalfeld

Den Einfluß eines zusätzlichen magnetischen Azimutalfeldes auf die Abhängigkeit des axialen elektrischen Feldes vom longitudinalen Magnetfeld zeigt Abb. 9. Je nach Orientierung des azimutalen Magnet-

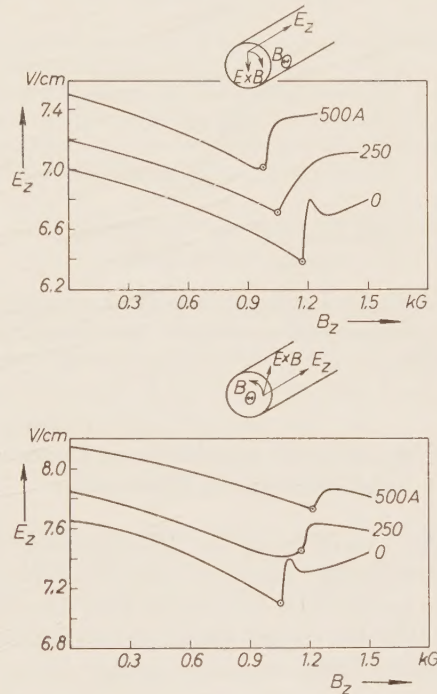


Abb. 9 a. Axiale elektrische Feldstärke in Abhängigkeit von der magnetischen Feldstärke mit zusätzlichem azimutalem magnetischem Feld (Azimutalfeld positiv; Drift nach innen).

Abb. 9 b. Azimutalfeld negativ; Drift nach außen.

○ kritische Feldstärke (Einsetzen des Rauschens).

feldes gibt es einen stabilisierenden oder destabilisierenden Einfluß. Die Kurven beziehen sich auf einen Gasdruck von 1,2 Torr. Abb. 10 gibt die Abhängigkeit der kritischen magnetischen longitudinalen Feldstärke von der azimutalen Feldstärke bei verschiedenen Gasdrücken. Es zeigt sich eine lineare Abhängigkeit für Drücke, die größer als 1 Torr sind. Bei kleineren Drücken treten Abweichungen auf, die vermutlich damit zusammenhängen, daß die freie Weglänge der Ionen in der Nähe des Innenleiters durch den Ionen-Gyroradius zu ersetzen ist, der nicht mehr klein ist, verglichen mit der Ausdehnung des

Innenleiters, so daß sein Einfluß, der bei höheren Drucken, d. h. höhere Felder und kleinere Gyroradien, eine Begrenzung des Plasmas darstellt, bei niederen Drucken mehr und mehr verschwindet.

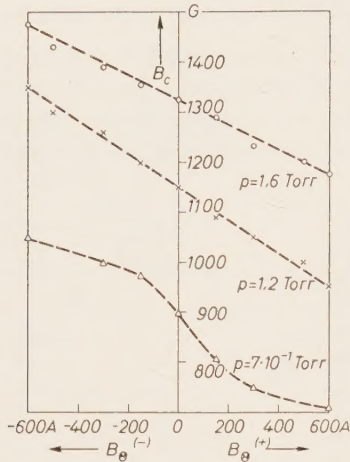


Abb. 10. Kritische magnetische Feldstärke in Abhängigkeit vom Erregestrom des Azimutalfeldes für verschiedene Gasdrücke. ○—○ $p=1,6$ Torr, ×—× $p=1,2$ Torr, △—△ $p=7 \cdot 10^{-1}$ Torr.

III. Diskussion der verschiedenen Deutungsmöglichkeiten des Phänomens

Bei der Untersuchung der Mechanismen, welche die experimentellen Tatsachen erklären könnten, sollen sechs verschiedene Hypothesen bzw. Theorien in diesem Abschnitt einzeln diskutiert und mit den experimentellen Daten verglichen werden. Diese sind:

1. Die Deutung des Phänomens als Folge des Radialfeldumschlags.
2. Deutung des Phänomens als „Kurzschlußeffekt“.
3. Deutung als Grenschichtinstabilität (HOH¹⁶).
4. Deutung als Folge einer Ionenwelleninstabilität.
5. Deutung als Folge von Run-away-Elektronen.
6. Deutung als Turbulenz (KADOMTSEV¹⁸).

1. Theoretische Grundlagen

Grundlage für alle Abschätzungen und theoretischen Betrachtungen bildet die übliche Diffusionstheorie der positiven Säule, die von SCHOTTKY⁴ entwickelt wurde und auf die Verhältnisse mit longitudinalem Magnetfeld ausgedehnt werden kann (vgl. etwa LEHNERT⁷).

Die Bewegung von Ladungsträgern kann beschrieben werden als Bewegung von geladenen Flüssigkeiten, für die Impulserhaltungsgleichungen und Massenerhaltungs-

gleichungen gelten müssen, die wir in der Form anschreiben:

$$\begin{aligned} m_i n \{ (\partial v_i / \partial t) + (v_i \nabla) v_i \} \\ = e n (\mathcal{E} + [v_i \mathcal{B}]) - k T_i \nabla n - m_i n_i v_i, \\ m_e n \{ (\partial v_e / \partial t) + (v_e \nabla) v_e \} \\ = -e n (\mathcal{E} + [v_e \mathcal{B}]) - k T_e \nabla n - m_e n v_e, \quad (3) \\ (\partial n / \partial t) + \nabla (n v_i) = Z n, \\ (\partial n / \partial t) + \nabla (n v_e) = Z n, \\ \text{rot } \mathcal{E} = 0. \end{aligned}$$

Hierin sind m_i , m_e die Masse der Ionen bzw. der Elektronen, e deren Ladungen, v_i , v_e die mittleren Geschwindigkeiten aller Teilchen einer Sorte in einem Volumenelement. Die folgenden Voraussetzungen liegen diesen Gleichungen zugrunde, die bei der Anwendung auf das Plasma in der positiven Säule einer Niederdruckentladung zulässig sind: Es ist angenommen, daß die Geschwindigkeitsverteilungen der Ionen und Elektronen nur von den Temperaturen abhängen und daß die Temperaturen T_i , T_e nicht vom Ort abhängen. Es wird angenommen, daß das Plasma quasineutral, d. h. $n_e \approx n_i \approx n$ sei.

Es wurde angenommen, daß der Ionisationsgrad so niedrig sei, daß die Stöße der Elektronen gegen Ionen, der Elektronen gegen Elektronen und der Ionen gegen Ionen vernachlässigbar seien. Die Reibungskräfte der Elektronen, die von ihren Stößen gegen das Neutralgas herrühren, nehmen wir proportional ihrer Relativgeschwindigkeit bezüglich des Neutralgases. Wir nehmen an, daß das Neutralgas ruht und daß die Neutralgasdichte ortsunabhängig ist. Dann sind die übertragene Impulse pro Volumen- und Zeiteinheit:

$$P_{in} = -m_i n v_i, \quad P_{en} = -m_e n v_e.$$

Die Proportionalitätsfaktoren ν haben die Dimension einer Frequenz und können gedeutet werden als diejenige Frequenz, mit der im Mittel ein Teilchen bei einem Stoß um 90° abgelenkt und sein gesamter Impuls in der Anfangsrichtung abgegeben wird.

Es wird angenommen, daß die freie Weglänge der Elektronen und Ionen λ_i , λ_e oder im Magnetfeld die Gyroradien klein seien gegenüber den Gefäßdimensionen, so daß ein Teilchen häufig stößt, ehe es an die Wand gelangt. Nur unter dieser Voraussetzung kann von Diffusion geredet werden und ist das Flüssigkeitsmodell brauchbar.

Wir setzen voraus, daß die Trägerdichte so niedrig sei, daß auch von einer Rekombination im Volumen abgesehen werden kann. Die Trägererzeugung im Volumen setzen wir proportional der Trägerdichte an: $Q = Z n$, wobei Z die Ionisationsrate ist, d. h. die Zahl der von einem Elektron in der Zeiteinheit erzeugten Ionenpaare. Z ist eine Funktion der Elektronentemperatur T_e und der Gasdichte²⁶.

Das Magnetfeld sei ein von außen angelegtes konstantes homogenes Feld, das Eigenfeld des Stromes sei

²⁶ A. V. ENGEL U. M. STEENBECK, Elektrische Gasentladungen, Springer-Verlag, Berlin 1932.

vernachlässigbar klein dagegen. Auf die Gln. (3) wird bei der Behandlung der Stabilität der positiven Säule in Abschnitt 3.7 zurückgegriffen werden.

Im stationären Fall ist $\partial/\partial t = 0$. Außerdem dürfen wir aber auch den Term $m n (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ gegenüber $k T \nabla n$ vernachlässigen, weil außerhalb der Randschicht die kinetische Energiedichte, $\frac{1}{2} m n v^2$, der Plasmabewegung klein ist verglichen mit dem Druck.

Im folgenden betrachten wir nun Anordnungen, die bezüglich der z-Achse eines Zylinderkoordinatensystems axialsymmetrisch sind. In die Richtung der positiven z-Achse soll auch das homogene magnetische Feld weisen. Die vorkommenden Vektorgrößen haben dann die Komponentendarstellungen:

$$\mathbf{r} = \{r, \varphi, z\}; \quad \mathbf{E} = \{E_r, 0, E_z\}; \quad \mathbf{B} = \{0, 0, B_z\};$$

$$\mathbf{v}_e = \{v_{er}, v_{e\varphi}, v_{ez}\}; \quad \mathbf{v}_i = \{v_{ir}, v_{i\varphi}, v_{iz}\};$$

$$\nabla n = \{\partial n / \partial r, 0, \partial n / \partial z\}.$$

Axialsymmetrie bedeutet, daß keine der Größen von dem Azimutwinkel φ abhängen darf, daß alle Ableitungen nach diesem Winkel also verschwinden müssen. Dann muß E_φ verschwinden wegen $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ und der Forderung der Singularitätsfreiheit auf den Punkten $r=0$. Führen wir nun die folgenden Abkürzungen ein: Mit $\omega_e = e B_z / m_e$; $\omega_i = e B_z / m_i$ die Gyrofrequenzen der Elektronen bzw. Ionen; mit $b_{e0} = e / (m_e v_e)$; $b_{i0} = e / (m_i v_i)$ die Beweglichkeiten der Elektronen bzw. Ionen parallel zum Magnetfeld; mit $D_{e0} = k T_e / (m_e v_e)$; $D_{i0} = k T_i / (m_i v_i)$ die Diffusionskoeffizienten der Elektronen bzw. Ionen parallel zum Magnetfeld; mit

$$b_e = \frac{b_{e0}}{1 + b_{e0}^2 B_z^2} = \frac{b_{e0}}{1 + (\omega_e / v_e)^2},$$

$$b_i = \frac{b_{i0}}{1 + b_{i0}^2 B_z^2}; \quad D_e = \frac{D_{e0}}{1 + b_{e0}^2 B_z^2}; \quad D_i = \frac{D_{i0}}{1 + b_{i0}^2 B_z^2}$$

die Beweglichkeiten und Diffusionskoeffizienten der Elektronen bzw. der Ionen quer zum Magnetfeld, dann kann man schließlich unter Benutzung der gemachten Voraussetzungen die beiden Impulserhaltungsgleichungen (3) in Komponenten zerlegen und nach den Geschwindigkeitskomponenten auflösen und erhält folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} v_{ir} &= b_i E_r - D_i (1/n) (\partial n / \partial r); \\ v_{er} &= -b_e E_r - D_e (1/n) (\partial n / \partial r); \\ v_{i\varphi} &= -b_{i0} B_z v_{ir}; \\ v_{e\varphi} &= b_{e0} B_z v_{er}; \\ v_{iz} &= b_{i0} E_z - D_{i0} (1/n) (\partial n / \partial z); \\ v_{ez} &= -b_{e0} E_z - D_{e0} (1/n) (\partial n / \partial z). \end{aligned}$$

Für die beiden Kontinuitätsgleichungen erhält man:

$$\begin{aligned} b_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n E_r) - D_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n}{\partial r} \right) \\ + b_{i0} \frac{\partial}{\partial z} (n E_z) - D_{i0} \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} &= Z n, \\ -b_e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n E_r) - D_e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n}{\partial r} \right) \\ - b_{e0} \frac{\partial}{\partial z} (n E_z) - D_{e0} \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} &= Z n. \end{aligned} \quad (4)$$

In einer langen zylindersymmetrischen Anordnung, in der alle Größen außer vom Winkel auch von der z-Koordinate unabhängig und Endeffekte ausgeschlossen sind, erhält man die bekannten Beziehungen:

$$\begin{aligned} E_r &= -[(D_e - D_i) / (b_e + b_i)] (1/n) (\partial n / \partial r); \\ V(r) - V(r_0) &= [(D_e - D_i) / (b_e + b_i)] \ln [n(r) / n(r_0)]; \\ n v_{ir} &= n v_{er}; \quad D_i (\partial n / \partial r); \\ D_a &= (b_i D_e + b_e D_i) / (b_e + b_i) \end{aligned} \quad (5)$$

($v_{ir} = v_{er}$, weil der radiale elektrische Strom Null sein muß) und für die radiale Dichteverteilung

$$n(r) = n_0 J_0 r \sqrt{Z} / D_a. \quad (6)$$

Dabei ist J_0 die BESSEL-Funktion nullter Ordnung und n_0 die Trägerdichte in der Rohrachse.

Die Zahlenwerte für die häufig benutzten Koeffizienten und Größen sind in Tab. 1 zusammengestellt. Sie wurden zum Teil aus Experimenten gewonnen, zum Teil dem Tabellenwerk von BROWN²⁷ entnommen.

2. Deutung des Phänomens als Folge des Radialfeldumschlages

Unter geeigneten Bedingungen kann die Diffusion der Ionen die der Elektronen überwiegen, was zur Umkehr des ambipolaren elektrischen Feldes führt. Dieser Fall tritt dann ein, wenn der Ausdruck für die radiale Potentialverteilung, Gl. (5),

$$V(r) - V(r_0) = \frac{D_e - D_i}{b_e + b_i} \ln \frac{n(r)}{n(r_0)}$$

für irgendeinen Wert von r sein Vorzeichen umkehrt. Da stets $n(r) > n(r_0)$ sein soll, wird die Feldumkehr durch die Bedingung gegeben

$$D_{e0} / (1 + b_{e0}^2 B_z^2) \leq D_{i0} / (1 + b_{i0}^2 B_z^2), \quad (7)$$

oder nach B aufgelöst:

$$B_z^2 \geq (D_{e0} - D_{i0}) / (D_{i0} b_{e0}^2 - D_{e0} b_{i0}^2). \quad (8)$$

Benutzen wir $D_{e0} = k T_e b_{e0} / e$, $D_{i0} = k T_i b_{i0} / e$, dann erhalten wir:

$$B_z^2 \geq \frac{(T_e / T_i) (b_{e0} / b_{i0}) - 1}{b_{e0}^2 - (T_e / T_i) b_{e0} b_{i0}} \approx \frac{1}{b_{i0}^2} \frac{T_e / T_i}{b_{e0} / b_{i0} - T_e / T_i}, \quad (9)$$

dieses wegen $T_e b_{e0} \gg T_i b_{i0}$.

Für $T_e / T_i > b_{e0} / b_{i0}$ gibt es kein noch so großes Magnetfeld, das die Feldumkehr bewirken könnte. In dem uns interessierenden Druckbereich können die Beweglichkeiten als proportional mit $1/p$ angesehen werden, d. h. b_{e0} / b_{i0} ist nahezu konstant. Setzt man dafür den mittleren Wert 140 aus der Datentabelle ein, nimmt man für T_e die experimentellen

²⁷ S. C. BROWN, Basic Data of Plasmaphysics, J. Wiley & Sons, New York 1959.

Werte bei der kritischen magnetischen Feldstärke und nimmt man für T_i Werte zwischen 500 und 1000 °K an, dann kann man die kritische magnetische Feldstärke für den Radialfeldumschlag als Funktion des Gasdruckes aufzeichnen (Abb. 11).

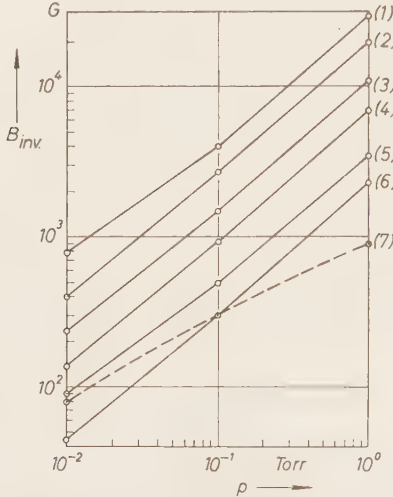


Abb. 11. Magnetische Feldstärke für das Eintreten des Radialfeldumschlages, gerechnet für verschiedene Beweglichkeiten und Ionentemperaturen.

Kurve	T_i	$b_{e0} \approx$	$b_{i0} \approx$
1	500°K	$30/p$	$0,2/p$
2	1000		
3	500	$90/p$	$0,6/p$
4	1000		
5	500	$270/p$	$1,8/p$
6	1000		
7 gemessene Werte der kritischen Feldstärke			

$$B_{inv}^2 = \frac{1}{b_{i0}} \frac{T_e/T_i}{b_{e0}/b_{i0} \cdot T_e/T_i}, \quad T_e \text{ aus Experiment.}$$

Man hat in dem Radialfeldumschlag eine Möglichkeit, die das Auftreten einer gewissen kritischen magnetischen Feldstärke verständlich machen würde, die außerdem in der qualitativ richtigen Weise vom Gasdruck und wegen $B \sim 1/b_{i0} \sim m_i$ auch von der Ionenmasse abhängt. Vergleicht man aber die gerechneten kritischen Feldstärken mit dem Mittelwert der gemessenen kritischen magnetischen Feldstärke, so sieht man, daß die gemessene Abhängigkeit der kritischen magnetischen Feldstärke vom Gasdruck viel schwächer ist als die hier errechnete, daß die gemessenen Beträge der kritischen magnetischen Feldstärke bei höheren Drucken um eine Größenordnung niedriger sind als die errechneten. Schließlich zeigen die Messungen der radialen Potentialverteilung (Abb. 7) bei Drucken $p > 3 \cdot 10^{-1}$ Torr, daß

überhaupt kein Radialfeldumschlag bei den magnetischen Feldstärken auftritt, bis zu denen gemessen werden konnte, was nach der Theorie auch zu erwarten ist, daß aber z. B. bei einem Druck von 1 Torr eine ganz deutlich ausgeprägte kritische magnetische Feldstärke bei $B = 900$ G mit sprunghaft ansteigenden Verlusten beobachtet wird (vgl. Oszillogramm Abb. 4 a).

Daß bei niedrigen Drucken ($p < 10^{-1}$ Torr) der Radialfeldumschlag und die kritische magnetische Feldstärke experimentell ungefähr zusammenfallen, kann rein zufällig sein. Es könnte aber auch in diesem Druckbereich, in dem die freien Weglängen der Ionen nicht mehr klein sind, eine Wechselwirkung zwischen zwei verschiedenen Effekten bestehen. Das Eintreten des Radialfeldumschlages könnte die Instabilität begünstigen oder ein anderer instabilitätserzeugender Mechanismus könnte die Verhältnisse in der Entladung derart verändern (durch Änderung der Elektronen- oder Ionentemperatur oder der Beweglichkeiten, d. h. der Stoßquerschnitte), daß dann auch die Bedingung für den Radialfeldumschlag erfüllt ist.

Jedenfalls scheint aber durch die Messung bei höherem Druck gezeigt zu sein, daß der Radialfeldumschlag nicht der entscheidende Mechanismus sein kann, der die erhöhte Diffusion bewirkt.

Ein Vergleich der gemessenen radialen Feldstärke bei $B_z = 0$ mit der aus der SCHOTTKYSchen Theorie berechneten ergab, daß die gemessene Feldstärke durchweg um den Faktor 2 größer ist als die gerechnete (dabei wurden der Rechnung Mittelwerte für die Elektronentemperatur zugrunde gelegt). Der Grund für die systematische Abweichung kann sein, daß entweder die Elektronentemperatur in Wirklichkeit höher ist, oder daß die Elektronentemperatur einen radialen Gradienten hat. Die wahrscheinlichste Erklärung ist die, daß die radiale Potentialverteilung durch den Sondenkörper stark verzerrt wird. Es wird in diesem Zusammenhang auf die Arbeit von ECKER²⁰ et al. hingewiesen, in der gezeigt wird, daß auch bei großer Vorsicht erhebliche Störungen des Plasmas durch die Sonde unvermeidlich sind und zu großen Fehlern führen.

3. Deutung des Phänomens als „Kurzschlußeffekt“

SIMON²⁸ hat darauf hingewiesen, daß die anomal hohe Diffusion, die in kurzen Bogenplasmen gemes-

²⁸ A. SIMON, ORNL-Rep. 1960 [1958].

sen wurde, daher rühren kann, daß das ambipolare elektrische Radialfeld in starken longitudinalen Magnetfeldern über leitende Endflächen des Entladungsgefäßes gewissermaßen kurzgeschlossen würde, wegen der viel höheren Beweglichkeit der Elektronen in Richtung des Magnetfeldes gegenüber ihrer Beweglichkeit senkrecht dazu. Dieser „Kurzschluß“ äußert sich in einer erhöhten Diffusion in radialer Richtung. Zur Abschätzung sind in den allgemeinen Kontinuitätsgleichungen (3) die Terme

$$b_e(1/r) (\partial/\partial r) (r n E_r)$$

$$\text{und } b_{e0}(\partial/\partial z) (n E_z) + D_{e0}(\partial^2 n/\partial z^2)$$

miteinander zu vergleichen. Sehen wir von dem Diffusionsanteil in z -Richtung ab²⁹, so verlangt die Zylindersymmetrie:

$$b_{e0}(\partial/\partial z) (n E_z) \ll b_e(1/r) (\partial/\partial r) (r n E_r). \quad (10)$$

Für $(\partial/\partial z) (n E_z)$ setzen wir näherungsweise $n E_z/(L/2)$, wobei L die Rohrlänge sei. In $b_e(1/r) (\partial/\partial r) (r n E_r)$ kann man die Ausdrücke einsetzen, die bei wirklich vorhandener Zylindersymmetrie für $n E_r$ gelten. Man erhält dann die folgende Relation:

$$\frac{D_{e0} - (b_{e0}^2 D_{i0} - D_{e0} b_{i0}^2) B_z^2}{b_{e0}(1 + b_{e0}^2 B_z^2)(1 + b_{i0}^2 b_{e0} B_z^2)} \gg \frac{2 E_z R^2}{L(2,4)^2}. \quad (11)$$

Wir haben hier nur die Relation für die Elektronen angeschrieben, weil diese die kritischere ist. In guter Näherung kann man im Druckbereich $10^{-2} < p < 10^0$ Torr die Beweglichkeiten proportional zu $1/p$ setzen: $b_{e0} = b'_{e0}/p$, $b_{i0} = b'_{i0}/p$. Damit wird die Ungleichung (11) zu:

$$\frac{1 - \left(\frac{b'_{e0}}{b'_{i0}} \frac{T_i}{T_e} - 1 \right) b_{i0}^2 \frac{B_z^2}{p^2}}{\left(1 + b_{e0}^2 \frac{B_z^2}{p^2} \right) \left(1 + b'_{e0} b'_{i0} \frac{B_z^2}{p^2} \right)} = \Phi \left(\frac{T_i}{T_e}, \frac{B_z^2}{p^2} \right) \gg \frac{2 E_z R^2}{L(2,4)^2} \frac{e}{k T_e}. \quad (12)$$

$$\text{Für } B_z^2/p^2 = \frac{1}{b_{i0}^2 (b'_{e0}/b'_{i0}) (T_i/T_e) - 1}$$

hat die Funktion auf der linken Seite eine Nullstelle, die wieder die Bedingung für den Radialfeldumschlag liefert. Man kann die Schar der Kurven $\Phi(B_z^2/p^2)$ mit T_i/T_e als Parameter aufzeichnen. Für $B/p < 5 \cdot 10^{-1}$ findet man, daß Φ vom Parameter T_i/T_e nur ganz schwach abhängt. Man kann Φ in diesem Bereich grob annähern durch

$$\Phi \approx \text{const}/(B/p)^3, \quad (13)$$

²⁹ Man kann zeigen, daß dieser Term neben dem vom elektrischen Feld herrührenden Term unter den gegebenen Verhältnissen vernachlässigbar ist.

wobei die Konstante von b'_{e0} und b'_{i0} abhängt. Von den beiden konkurrierenden Gliedern überwiegt das z -abhängige und liefert damit sicher eine Abweichung von der Zylindersymmetrie, wenn

$$\Phi < 2 e E_z R^2 / [L(2,4)^2 k T_e],$$

oder, mit (13) nach B aufgelöst, wenn

$$B_z^3 > [(L T_e p^3) / (R^2 E_z)] \cdot \text{const}. \quad (14)$$

Es ist die Frage, ob dieser Effekt das beobachtete Phänomen beschreiben kann. Die Relation (14) gibt qualitativ die vom Experiment gezeigte Abhängigkeit der kritischen magnetischen Feldstärke vom Gasdruck und dem Rohrdurchmesser und auch das Experiment mit zusätzlicher HF-Ionisierung, bei dem E_z erniedrigt, T_e möglicherweise erhöht wird, richtig wieder. In Abb. 12 sind die aus der Kurzschlußbedingung Gl. (12) (Gleichheit der beiden Terme)

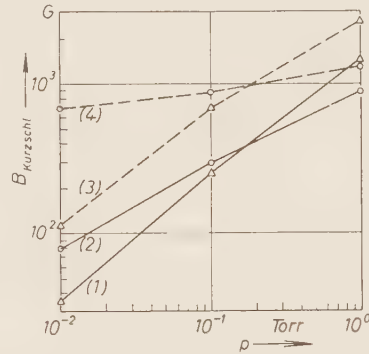


Abb. 12. Magnetische Feldstärke für das Einsetzen des Kurzschlußeffektes, verglichen mit den gemessenen kritischen Feldstärken. (1) gerechnete Werte für $b_{e0} \approx 30/p$, $b_{i0} \approx 0,2/p$ ohne HF; (2) gemessene Werte ohne HF; (3) gerechnete Werte mit HF-Ionisierung für $b_{e0} \approx 30/p$, $b_{i0} \approx 0,2/p$; (4) gemessene Werte mit HF-Ionisierung.

ermittelten Werte für die kritische Feldstärke in Abhängigkeit vom Druck mit den gemessenen Daten verglichen. Daraus geht hervor, daß die gemessene Druckabhängigkeit schwächer ist als die gerechnete. Für Beweglichkeiten, die gegenüber den Richtwerten aus Tab. 1 um den Faktor 3 niedriger sind, ergibt sich größenordnungsmäßig eine Übereinstimmung der theoretischen mit den experimentellen Werten. Bei zusätzlicher HF-Ionisierung ergibt sich eine starke Abweichung der dazu berechneten Druckabhängigkeit von der gemessenen. Dabei wurden für die theoretischen Werte die gemessenen hohen Elektronentemperaturen von 16 bis 20 eV zugrunde gelegt. Da die wirkliche Temperatur, wie früher er-

örtert, wahrscheinlich nicht höher als in dem Fall ohne HF-Ionisierung ist, wird die Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment noch größer.

Man kann auch in dem Fall eines zusätzlichen azimutalen magnetischen Feldes eine grobe Abschätzung machen und findet, daß der Einfluß eines solchen zusätzlichen Feldes auf die Bedingungsgleichung (14) in der Größenordnung der gemessenen Werte liegt.

Ein Einwand gegen diese Deutung des Phänomens ist die Tatsache, daß die Aufhebung der Zylindersymmetrie mit wachsendem Magnetfeld ein kontinuierlicher Vorgang sein sollte, während die Experimente eine Diffusion zeigen, die bis zum kritischen Magnetfeld sehr gut mit der SCHOTTKYschen Theorie bei angenommener Zylindersymmetrie übereinstimmen und dann ein abruptes Ansteigen der Verluste zeigen. HOH hat bei seinen Experimenten die Rohrlänge variiert und keine Abhängigkeit der kritischen magnetischen Feldstärke von der Rohrlänge gefunden, solange L/R nicht zu klein gemacht wurde. Schließlich würde man erwarten, daß bei Einsetzen des Kurzschlusses die Diffusion zwar nicht mehr weiter wie $1/B^2$ abnimmt, aber nicht, daß sie sprunghaft ansteigt, wie es bei höheren Drucken der Fall ist.

Diese Gründe und die schlechte Übereinstimmung in der Druckabhängigkeit lassen diese Deutung des Phänomens unbefriedigend erscheinen.

4. Deutung des Phänomens aus dem BOHMSchen Grenzschichtkriterium (Theorie von HOH)

Die hier zu skizzierende Theorie und Deutung des Phänomens wurde von HOH¹⁶ vorgeschlagen und von ALLEN¹⁷ sowie PAULIKAS und PYLE¹⁵ versucht, experimentell zu prüfen. Ausgangspunkt der Hypothese ist ein von BOHM¹⁷ angegebenes Kriterium für die Existenz einer positiven Raumladungsschicht an der Begrenzung des Plasmas:

$$v_{ir}(R') > (k T_e/m_i)^{1/2}. \quad (15)$$

Dieses Kriterium ist eine Definition für den Bereich in Wandnähe, den man als Grenzschicht bezeichnen soll. Es besagt, daß die eigentliche Raumladungsschicht an der Stelle R' beginnt, an der die Ionen in einem zunächst noch schwachen beschleunigenden Potentialgefälle die Radialgeschwindigkeit

$$v_{ir} = (k T_e/m_i)^{1/2}$$

erreicht haben. Vor dieser eigentlichen Raumladungs-

schicht liegt ein Übergangsgebiet, in dem die Ionen auf diese Geschwindigkeit beschleunigt werden. Diese Bedingung wurde von HOH mit der modifizierten SCHOTTKYschen Balancegleichung (vgl. BICKERTON und v. ENGEL⁶, HOH¹⁶) kombiniert. Die Balancegleichung wird aus der Bedingung erhalten, daß die Zahl der pro Sekunde und cm Rohrlänge in die Grenzschicht $r = R'$ eintretenden Ionen gleich der Zahl der erzeugten Ionen sein muß. Sie lautet:

$$v_{ir}(R') \approx 5 D_a / [R J_0(2,4 R'/R)]. \quad (16)$$

Damit erhält man die folgende Bedingung:

$$v_{ir}(R') \approx 5 D_a / [R J_0(2,4 R'/R)] > (k T_e/m_i)^{1/2}. \quad (17)$$

Für D_a kann man unter der Voraussetzung $T_e \gg T_i$ und $b_{e0} \gg b_{i0}$ setzen:

$$D_a \approx (k T_e/e) [b_{i0}/(1 + b_{i0} b_{e0} B_z^2)]. \quad (18)$$

Löst man damit (17) nach B auf, so erhält man das Kriterium für die Existenz einer Grenzschicht in der Form:

$$B_z^2 < \frac{1}{b_{i0} b_{e0}} \left\{ \frac{5 (k m_i)^{1/2} b_{i0} T_e^{1/2}}{e R J_0(2,4 R'/R)} - 1 \right\}. \quad (19)$$

Läßt man B von Null an wachsen, dann vermindert man die Radialkomponente der Ionengeschwindigkeit an der Schichtgrenze, die Grenze, von der an es eine positive Raumladung gibt, rückt weiter zur Wand hin. Das geht solange, bis diese Grenze die Wand erreicht hat. Dieser Zustand definiert den kritischen Wert für B . Bei einer weiteren Steigerung von B sollte es dann keine schützende Grenzschicht vor der Wand mehr geben, d. h. es gibt kein Bremsfeld mehr für die Elektronen, d. h. alle Elektronen können nun ungehindert die Wand erreichen, was zu höheren Verlusten führen müßte.

Für Druckbereiche, in denen $b_{i0} b_{e0} B^2 \gg 1$ ist, kann man die Bedingung (19) schreiben:

$$B_z^2 > [p m_i^{1/2} T_e^{1/2}] / [R J_0(2,4 R'/R)]. \quad (20)$$

Diese Bedingung gibt den experimentellen Befund bezüglich Druck- und Rohrradiusabhängigkeit der kritischen magnetischen Feldstärke richtig wieder. Für höhere Drücke ist aber $b_{i0} b_{e0} B^2 \gg 1$ nicht mehr erfüllt, wie die Datentabelle zeigt, und die 1 in (19) darf nicht vernachlässigt werden. Setzt man die Beweglichkeiten wieder proportional zu $1/p$, dann erhält man einen Ausdruck von der Form:

$$B_z^2 > f p - a p^2, \quad (21)$$

wobei f und a positive Größen sind. Diese Funktion hat ein Maximum bei $p = f/2a$ und soll bei $p = f/a$

wieder durch Null gehen. Dieses ist eine sehr wesentliche Voraussage der Theorie, die experimentell zu bestätigen wäre.

In Abb. 13 sind die theoretischen Werte der kritischen Feldstärke für verschiedene Werte der Beweglichkeiten in Abhängigkeit vom Gasdruck mit den experimentellen Werten verglichen. Außer von den

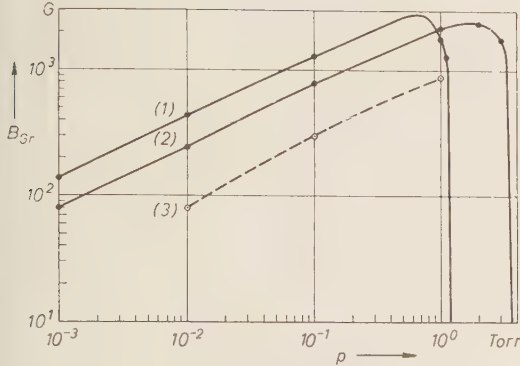


Abb. 13. Kritische magnetische Feldstärke aus der Honschen Theorie (Verletzung des Grenschichtkriteriums).

$$B_{Gr}^2 = \frac{1}{b_{i0} b_{e0}} \left\{ \frac{5 \sqrt{K}}{e} \frac{b_{i0} \sqrt{m_i} \sqrt{T_e}}{R J_0 (2,4 R'/R)} - 1 \right\},$$

$$J_0 = 10^{-2}; \quad \sqrt{T_e} = 1,9 \cdot 10^{-2}.$$

- (1) $b_{e0} \approx 30/p$, $b_{i0} \approx 0,2/p$; (2) $b_{e0} \approx 90/p$, $b_{i0} \approx 0,6/p$;
(3) gemessene Werte.

Beweglichkeiten hängen die kritische magnetische Feldstärke und die Nullstelle stark von der Größe $J_0 (2,4 R'/R)$ an der Schichtgrenze $r = R'$ ab. HON schätzte diesen Wert ab, indem er die Divergenzgleichung für das elektrische Feld zu Hilfe nahm, womit er für J_0 erhielt:

$$J_0^3 (2,4 R'/R) \approx \frac{\epsilon_0}{e n_0} \frac{D_e - D_i}{b_e + b_i} \cdot (2,4/R)^2 J_1^2 (2,4 R'/R) \frac{n_e'}{n_i' - n_e'}. \quad (22)$$

Hierin ist n_0 die Trägerdichte in der Achse, n_e' , n_i' sind die Trägerdichten an der Schichtgrenze. Die Unsicherheit aller Faktoren kann Faktoren 10 bis 20 in J_0^3 ausmachen, d. h. bis zu Faktoren 3 in der Nullstelle. HON gibt für J_0 einen Wert von $1,3 \cdot 10^{-2}$ an, den wir bei der Berechnung von B_c auch benutzt haben.

Der Vergleich mit den experimentellen Werten zeigt, daß diese um den Faktor 3 bis 4 unter den gerechneten liegen, daß aber die Größe der Druckabhängigkeit sehr gut übereinstimmt. Aus der Tatsache, daß ein eindeutiges Umbiegen der Kurve nicht beobachtet wurde, möchte man schließen, daß die Theorie nicht zutreffend ist. Wegen der großen Un-

sicherheit in der Lage der Nullstellen dürften sowohl unsere Messungen als auch die der Berkeley-Gruppe diesen Schluß noch nicht zulassen. Dazu wäre es notwendig, die Messungen bis auf Drucke von 10 Torr auszudehnen, wozu die experimentellen Mittel hinsichtlich des Magnetfeldes nicht ausreichend sind.

Bei dem Versuch, die Ergebnisse der Experimente mit zusätzlicher HF-Ionisierung mit dieser Theorie zu erklären, ergeben sich Widersprüche. Setzt man (22) in (19) ein und schreibt man wieder

$$b_{e0} = b'_{e0}/p, \quad b_{i0} = b'_{i0}/p;$$

nimmt man an, daß $b'_{e0} \gg b'_{i0}$, $T_e \gg T_i$ und daß

$$[1 - (T_i/T_e - b'_{i0}/b'_{e0}) b'_{i0} b'_{e0} (B_z^2/p^2)]^{1/2} \approx 1$$

gesetzt werden kann, was für $p > 10^{-1}$ Torr für nicht zu hohe B gut erfüllt ist, dann erhält man für das kritische Magnetfeld:

$$\left(1 + b'_{i0} b'_{e0} \frac{B_z^2}{p^2}\right) \approx \frac{125 (k m_i)^{3/2}}{e \epsilon_0 k (2,4)^2 J_1^2 (2,4 R'/R)} \cdot \frac{n_0 T_e^{1/2}}{R p^3} \frac{n_i' - n_e'}{n_e'}. \quad (23)$$

Man sieht, daß eine Erhöhung der Elektronentemperatur oder der Dichte n_0 , wie sie bei zusätzlicher HF-Ionisierung auftreten könnten, zwar qualitativ eine Erhöhung der kritischen magnetischen Feldstärke bedeuten würden, daß diese Abhängigkeit aber nur ganz schwach ist. Andererseits geht E_z , das sich stark ändert, gar nicht in dieses Kriterium ein. Eine Änderung der Stoßfrequenzen bei höherer Elektronentemperatur und damit der Konstanten in (23) kann nicht in Frage kommen, da die Stoßfrequenzen sich bis zu Energien von 50 eV kaum ändern, denn es ist $\nu = \sigma v_{th} n_{gas}$ und der Wirkungsquerschnitt σ nimmt in diesem Bereich mit der Energie noch wie $1/v_{th}$ ab.

Um eine Erhöhung der kritischen magnetischen Feldstärke um den Faktor 5 zu erklären, wie es bei einem Druck von 10^{-1} Torr beobachtet werden konnte, müßte das Produkt $n_0 T_e^{1/2} (n_i' - n_e')/n_e'$ um den Faktor 600 wachsen. Die Doppelsondenmessungen mit der Sonde in der Entladungsachse zeigen, daß der Ionensättigungsstrom zur Sonde mit HF-Ionisierung höchstens um den Faktor 2 bis 3 gewachsen ist. Der Ionensättigungsstrom hängt aber mit der Trägerdichte und der Elektronentemperatur durch die Beziehung zusammen (vgl. BOHM¹⁷)

$$I_{sätt} = 0,4 n_0 e \left(\frac{2 k T_e}{m_i} \right)^{1/2} F_{sonde}. \quad (24)$$

Das bedeutet, das Produkt $n_0 T_e^{1/2}$ kann höchstens

um den Faktor 3 gewachsen sein; damit müßte $(n_i' - n_e')/n_e'$ um den Faktor 200 angewachsen sein. Das führt aber zu Widersprüchen mit der BOHMschen Grenzschildtheorie und damit der Grundlage dieses Deutungsversuches.

Es ist nämlich nach der Abschätzung von HON: $(n_i' - n_e')/n_e' \approx 10^{-2}$, Erhöhung um den Faktor 200 bedeutet $n_i'/n_e' \approx 2$. In der Grenzschild ist (siehe BOHM¹⁷):

$$n_e(x) = n_{pl} \exp \{ -e V(x)/(k T_e) \}.$$

Das BOHMsche Kriterium verlangt $V(R') = \frac{1}{2} k T_e/e$, damit ist

$$n_e(R') = n_{pl} e^{-1/2}.$$

n_{pl} bedeutet dabei die Teilchendichte am Rande zwischen Übergangsschild und ungestörtem Plasma. Andererseits sollte aber die Teilchendichte überall eine mit dem Radius monoton fallende Funktion $N(r)$ sein, also

$$n_i(R') = n_0 N(R'); \quad n_{pl} = n_0 N(R_{pl}),$$

wobei $R' > R_{pl}$ ist. Damit erhält man

$$n_i(R')/n_e(R') = 2 \quad \text{wäre also} \quad N(R') > N(R_{pl}).$$

Für $n_i(R')/n_e(R') = 2$ wäre also $N(R') > N(R_{pl})$. Das bedeutet, daß die Trägerdichte keine mit dem Radius monoton fallende Funktion sein könnte. Die Leitfähigkeit des Plasmas ist aber so gering, daß kein Grund zu der Annahme besteht, daß die HF-Ionisation nur in der Grenzschild wirksam sein sollte und nicht in das Plasma einzudringen vermag.

Die Deutung des Phänomens im Rahmen der HONschen Theorie führt also bei dem Experiment mit zusätzlicher HF-Ionisierung zumindest zu sehr großen Schwierigkeiten.

Ein zusätzliches magnetisches Azimutalfeld erzeugt eine zusätzliche Driftgeschwindigkeit des Plasmas in radialer Richtung, die positiv oder negativ, je nach Vorzeichen des Azimutalfeldes, ist. Man kann die radiale Komponente der Bewegung aus den Impulsgleichungen ausrechnen (vgl. Abschn. III.7.3). Für den Fall, daß $B_\phi^2 \ll B_z^2$ und mit $B_\phi = I/r$, erhält man:

$$\frac{b_{i0}}{b_{e0}} \frac{D_{e0}}{1 + b_{i0} b_{e0} B_z^2} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} = \frac{b_{i0} b_{e0} E_z I}{1 + b_{i0} b_{e0} B_z^2} \frac{1}{r n} \quad (25)$$

An der Schichtgrenze $r = R'$ soll diese Geschwindigkeit nach dem BOHM-Kriterium größer als $(k T_e/m_i)^{1/2}$ werden, und man erhält als Kriterium für die kritische magnetische Feldstärke:

$$\frac{b_{i0}}{b_{e0}} \frac{D_{e0}}{1 + b_{i0} b_{e0} B_z^2} \frac{1}{n(R')} \frac{\partial n}{\partial r} = \frac{b_{i0} b_{e0} E_z I}{R n(R')} \quad (26)$$

$$\left(\frac{b_{i0}}{b_{e0}} \frac{D_{e0}}{1 + b_{i0} b_{e0} B_z^2} \right)^2 > \frac{1}{4} \frac{E_z^2 I^2}{B_z^2}.$$

Für positive Erregeströme I , d. h. die Driftgeschwindigkeit ist nach innen gerichtet, tritt die Instabilität früher ein, wie auch beobachtet wurde. Entsprechendes gilt für negative I . Die Änderung der kritischen magnetischen Feldstärke mit dem Erregestrom ist

$$(dB_c/dI) \sim - (E_z/T_e^{1/2}) (1/B_c). \quad (27)$$

Danach sollte sie umgekehrt proportional zu B_c sein. Abb. 10 zeigt aber, daß sie für höhere Drücke in weiten Bereichen konstant ist. Nach Abb. 14 sollte $E_z/T_e^{1/2} \sim p$ und nach Abb. 5 $B_c \sim p$ sein, so daß dB/dI von p nicht abhängig sein sollte, im Gegensatz zu den Ergebnissen in Abb. 10.

Ein weiterer Einwand ist das anomale Verhalten von Stickstoff. Stickstoff zeigt eine um den Faktor 2 niedrigere kritische magnetische Feldstärke als He, obgleich seine Ionenmasse größer ist. Der Grund kann eigentlich nur in der sehr viel höheren elektrischen Feldstärke bei Stickstoffentladungen liegen. Da aber die kritische magnetische Feldstärke in der HONschen Theorie von der elektrischen Feldstärke gar nicht und von der Elektronentemperatur nur sehr schwach abhängt, kann sie diesen Effekt nicht befriedigend erklären.

Ebenfalls gegen diese Theorie spricht, daß die kritische magnetische Feldstärke etwa proportional zu $n_0^{1/4}$ sein sollte. Da n_0 proportional zum Gesamtstrom ist, sollte B_c , wenn auch schwach, vom Entladungsstrom abhängen. Von LEHNERT⁷ ist bei seinen Messungen der Strom um den Faktor 10 geändert worden. Das sollte einer Änderung der kritischen magnetischen Feldstärke um den Faktor 1,7 entsprechen, während nur eine sehr geringe Änderung beobachtet wurde.

5. Deutung des Phänomens als Folge einer Ionenwelleninstabilität

Die Ionenwelleninstabilität ist ein in der Wanderfeldröhre zur Verstärkung elektromagnetischer Wellen technisch ausgenutzter Effekt. Beschleunigte Elektronen, deren Geschwindigkeit etwas größer als die Phasengeschwindigkeit einer längs einer Verzögerungsleitung laufenden Welle ist, werden von dieser zunächst dichtemoduliert und dann auf die Phasengeschwindigkeit gebremst, wobei sie ihre Energie an die Welle abgeben. In einem Plasma übernehmen Ionenschwingungen die Rolle der elektromagnetischen Welle. Diese Schwingungen werden von schnell driftenden Elektronen zu hohen Amplituden aufgeschaukelt. Diese Ionenwellen sind fluktuierende

Mikrofelder, die in dem Plasma wie zusätzliche Streuzentren für die geladenen Teilchen, in erster Linie für die Elektronen, wirken. Zusätzliche Streuzentren bedeuten eine Quasierhöhung der Stoßfrequenz ν_e . Eine solche Erhöhung der Stoßfrequenz vermindert in dem Diffusionskoeffizienten

$$D_e = D_{e0} / [1 + (\omega_e / \nu_e)^2]$$

den Einfluß des Magnetfeldes und führt damit zu einer Erhöhung der Diffusion. Genauer untersucht wurde dieser Einfluß von fluktuierenden elektrischen Mikrofeldern auf die Diffusion quer zum Magnetfeld in einer Arbeit von SPITZER³⁰. Von BERNSTEIN³¹ wurde, unter Berücksichtigung der thermischen Bewegung der Elektronen und Ionen auf der Basis der BOLTZMANN-Gleichung, allerdings ohne Berücksichtigung der Stöße, ein Kriterium für das Auftreten solcher anwachsender Ionenwellen abgeleitet:

$$u_{D,e} \geq \frac{\bar{v}_{e,th} (m_e/m_i)^{1/2}}{\sqrt{1 + k_{\parallel}^2 \lambda_{D,e}^2 + k_{\perp}^2 (\bar{v}_{i,th}/\omega_i)^2 (T_e/T_i)}}. \quad (28)$$

Hier ist $u_{D,e}$ die Driftgeschwindigkeit der Elektronen in Richtung des Magnetfeldes, $\bar{v}_{e,th}$ deren mittlere thermische Geschwindigkeit, m_e/m_i das Elektronen-Ionen-Massenverhältnis, $k_{\parallel}$ und $k_{\perp}$ die Ausbreitungsvektoren für die Wellen parallel und senkrecht zum Magnetfeld, $\lambda_{D,e}$ die Elektronen-DEBYE-Länge, $\bar{v}_{i,th}$ die mittlere thermische Geschwindigkeit der Ionen, ω_i die Ionenzyklotronfrequenz, T_e , T_i die Elektronen- bzw. Ionen-Temperatur. Das Kriterium ist abgeleitet unter den folgenden Voraussetzungen:

$T_e \gg T_i$: die Elektronentemperatur sei groß, verglichen mit der Iontemperatur, aber beide seien im wesentlichen MAXWELL-Verteilungen.

$\omega \ll \omega_i$: die Frequenzen der Ionenwellen seien klein, verglichen mit der Ionenzyklotronfrequenz.

$v_{ph} > \bar{v}_{i,th}$: die Phasengeschwindigkeit der Ionenwellen sei größer als die thermische Geschwindigkeit der Ionen.

Der Wurzelausdruck auf der rechten Seite der Gl. (28) ist von der Größenordnung 1, und sein Einfluß ist nur ganz schwach, das Magnetfeld geht kaum ein.

In der positiven Säule haben die Elektronen wegen des axialen elektrischen Feldes stets eine hohe Driftgeschwindigkeit, und es ist die Frage, ob das Kriterium erfüllt ist. Wenn ja, dann ist Ionenwelleninstabilität möglich, und es ist experimentell zu prüfen, ob das Verhältnis $u_{D,e}/\bar{v}_{e,th}$ sich in kritischer

Weise mit dem Magnetfeld ändert, wofür das Kriterium selbst allerdings kaum einen Anhalt gibt, weil, wie gesagt, das Magnetfeld nur ganz schwach eingeht. Zur Prüfung kann man aus den gemessenen Werten von E_z und T_e in Abhängigkeit vom Magnetfeld das Verhältnis $E_z \cdot T_e^{-1/2}$ auftragen. Dieses Verhältnis ist wegen

$$b_{e0} E_z = u_{D,e} \quad \text{und} \quad (3 k T_e / m_e)^{1/2} = \bar{v}_{e,th},$$

proportional zum Verhältnis $u_{D,e}/\bar{v}_{e,th}$.

Ionenwelleninstabilität kann auftreten, wenn

$$\frac{E_z}{T_e^{1/2}} \geq \frac{1}{b_{e0}} \left(\frac{3 k}{m_e} \right)^{1/2} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} = \frac{1}{b_{e0}} \cdot 80 \left[\frac{\text{Volt}}{\text{cm (eV)}^{1/2}} \right]. \quad (29)$$

Die gemessenen Werte dieses Verhältnisses liegen für Drücke $p > 10^{-1}$ Torr, und wenn man für b_{e0} einen um den Faktor 3 niedrigeren Wert als den in Tab. 1 angegebenen zugrunde legt, in der Nähe der theoretischen Werte für Instabilität. Für kleinere Drücke sind die gemessenen Werte um fast eine Größenordnung höher als die theoretischen, d. h. es sollte immer Zweistrominstabilität vorliegen. Die gemessene Abhängigkeit des Verhältnisses vom Magnetfeld zeigt kein kritisches Verhalten, insbesondere kein Ansteigen, was das Einsetzen der Instabilität bei einer kritischen Feldstärke erklären könnte (Abb. 14). Ein weiteres Argument gegen die Deutung des

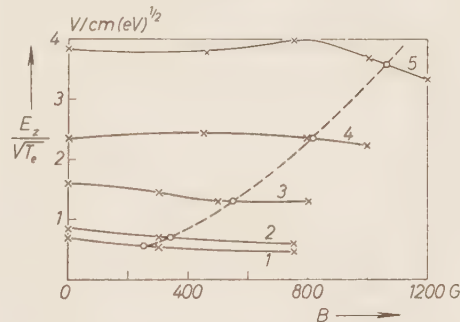


Abb. 14. Zur Prüfung der Ionenwelleninstabilität. Abhängigkeit des Verhältnisses $E_z/V T_e \sim \bar{u}_{\text{Drift}}/\bar{v}_{e,th}$ von der magnetischen Feldstärke für verschiedene Drücke.

Kurve	1	2	3	4	5
p (Torr)	$6 \cdot 10^{-2}$	10^{-1}	$3,7 \cdot 10^{-1}$	$7 \cdot 10^{-1}$	1,2

⊙ kritische Punkte.

Phänomens als Folge einer Ionenwelleninstabilität liefert das Experiment mit zusätzlichem Azimutal-

³⁰ L. SPITZER JR., *Matt-Rep.* 40 [1960].

³¹ I. B. BERNSTEIN, E. A. FRIEMANN, R. M. KULSRUD u. M. N. ROSENBLUTH, *Phys. Fluids* 3, 136 [1960].

feld. Einmal wird durch das Azimutalfeld die Beweglichkeit der Elektronen in z -Richtung behindert, was im Sinne der Ionenwelleninstabilität unabhängig von der Orientierung des Azimutalfeldes eine Stabilisierung bedeuten würde. Beobachtet wurde aber auch eine destabilisierende Wirkung, wenn das Azimutalfeld linksdrehend war. Andererseits bewirkt das Azimutalfeld zusammen mit dem ambipolaren E_r -Feld eine Driftgeschwindigkeit, die wegen der unterschiedlichen Beweglichkeiten für Elektronen und Ionen verschieden ist, also eine Änderung ihrer Relativgeschwindigkeit bedeutet, und zwar derart, daß sie im Fall positiver Azimutalfeldrichtung die Elektronen zur Kathode hin driften läßt, also entgegen der Drift, die die Ionenwelleninstabilität erzeugt. Damit würde das Feld stabilisierend wirken. Beobachtet wurde in diesem Fall gerade eine destabilisierende Wirkung des Azimutalfeldes. Entsprechend widerspricht auch im umgekehrten Fall das Experiment dieser Theorie. Wegen dieser Argumente dürfte diese Theorie als mögliche Deutung des Phänomens ausscheiden.

6. Deutung des Phänomens als Folge von Run-away-Elektronen

Mit der vorigen Deutung verwandt, aber in dieser nicht ganz enthalten ist die Deutung des Phänomens als Folge einer durch Run-away-Elektronen erzeugten Instabilität. Run-away-Elektronen entstehen dadurch, daß Elektronen einerseits in einem elektrischen Feld beschleunigt werden, daß andererseits der Stoßquerschnitt und damit die Reibung durch die Neutralteilchen für schnelle Elektronen mit wachsender Elektronengeschwindigkeit sehr schnell kleiner wird. Wenn der Stoßquerschnitt stärker als $1/v^2$ mit der Geschwindigkeit abnimmt, dann wird die Reibungskraft mit wachsender Geschwindigkeit der Elektronen kleiner, die Elektronen werden dauernd beschleunigt, sie laufen aus dem Volumen des Geschwindigkeitsraumes, in dem sie sich anfangs aufgehalten haben, weg. Diese weglaufenden Elektronen sind vermöge ihrer großen Driftgeschwindigkeit in der Lage, Ionenschwingungen anzufachen, die dann ihrerseits, wie im vorigen Abschnitt beschrieben, zu einer Erhöhung der Diffusion führen können. Es ist zu prüfen, ob es solche Run-away-Elektronen in der positiven Säule in merklicher Zahl geben kann, und ob diese mit wachsendem Magnetfeld zunehmen.

Um den Einfluß solcher Run-away-Elektronen prüfen zu können, muß man die Zahl der Run-away-Elektronen kennen, die unter dem Einfluß eines beschleunigenden elektrischen Feldes pro Sekunde und cm^3 erzeugt werden und eine bestimmte Energie ε erreichen. Auf Grund einfacher Überlegungen bezüglich der Stoßwahrscheinlichkeiten, wobei für eine grobe Abschätzung von der statistischen Verteilung der Teilchengeschwindigkeiten abgesehen und stattdessen mit einer allen Elektronen gemeinsamen thermischen Geschwindigkeit und Stoßweglänge $\lambda(v_{e,th.})$ gerechnet ist, erhält man für diese Zahl den Ausdruck (vgl. GROSSMANN-DOERTH³²)

$$\varphi(\varepsilon) = v_{e,th.} n_e \exp \left\{ - \frac{n_n}{E} \int_{\varepsilon_{th.}}^{\varepsilon} q(\varepsilon) d\varepsilon \right\}. \quad (30)$$

Darin ist $\varphi(\varepsilon)$ die Zahl der pro Sekunde und cm^3 die Energie ε erreichenden Elektronen, $v_{e,th.}$ die Stoßfrequenz der thermischen Elektronen, n_e die Zahl der Elektronen pro cm^3 , n_n die Dichte der bremsenden Teilchen, E das beschleunigende elektrische Feld, $\varepsilon_{th.}$ die thermische Energie der Elektronen, ε die Energie, bis zu der die Elektronen ohne Stoß beschleunigt werden, $q(\varepsilon)$ der Transportquerschnitt, d. h. der Wirkungsquerschnitt für vollständigen Impulsaustausch.

Um das Integral im Exponenten der Gl. (30) auszuwerten, muß man den Transportquerschnitt in dem interessierenden Energiebereich kennen. Für Energien zwischen 1 eV und 100 eV für Stöße von Elektronen gegen He-Atome können die Werte der Datensammlung von BROWN²⁷ entnommen werden. Für höhere Energien kann man die Werte aus der Streutheorie mit der BORNSchen Näherung ermitteln (vgl. ¹⁹), die man passend an die gemessenen Werte bei BROWN anschließen kann. Auf diese Weise wurde der folgende Ausdruck für diesen Querschnitt gefunden, dessen Genauigkeit für unsere Abschätzung ausreichend sein wird:

$$q(\varepsilon) = 10^{-16} \frac{7,2 + 0,26 \varepsilon + 3,8 \cdot 10^{-4} \varepsilon^2}{(1 + 2,5 \cdot 10^{-2} \varepsilon)^3}. \quad (31)$$

Darin ist q in cm^2 , ε in eV einzusetzen. Mit diesen Werten wurde das Integral ausgerechnet, und mit $n_e = 10^{10}$, $\varepsilon_{th.} = 3$ eV wurde $\varphi(\varepsilon)$ für verschiedene Gasdrücke in Abhängigkeit von ε bestimmt. Aus den Werten bei $p = 1$ Torr findet man, daß 10^{14} Elektronen pro Sekunde und cm^3 eine Energie von

³² U. GROSSMANN-DOERTH u. J. JUNKER, Laborbericht MPI für Physik 1960, unveröffentlicht.

4 eV erreichen, 5 eV werden nur noch von 10^8 Elektronen erreicht. Bei 1 Torr entstehen pro Sekunde und cm^3 im Volumen 10^{14} Elektronen, wie man der Datentabelle entnimmt. Das bedeutet, jedes entstehende Elektron wird im Mittel durch den Run-away-Mechanismus einmal bis zu der Energie von 4 eV beschleunigt (5 eV werden nur von jedem 10^6 -ten Elektron erreicht). Das ist aber ein unwesentliches Ereignis gegenüber 10^9 Stößen, die das Elektron im Mittel pro Sekunde macht. Man sieht daraus, daß der Anteil der Run-away-Elektronen in diesem Zusammenhang keine Rolle spielen kann. Für niedrigere Drücke ist die Run-away-Elektronen-Rate zwar sehr viel höher, weil diese Rate exponentiell von dem Verhältnis E_z/p abhängt, das mit abnehmendem Druck stark anwächst. Da aber das Phänomen vor allem bei höheren Drucken erklärt werden soll, wo es am ausgeprägtesten ist, genügt es zu zeigen, daß der Run-away-Elektronen-Effekt dort nicht mitwirkt, um ihn als wesentlichen Mechanismus auszuschließen.

7. Deutung des Phänomens als Turbulenz

7.1. Die Theorie von Kadomtsev¹⁸. Die Grundgleichungen für die Bewegung der Elektronen in der Säule sind analog den Grundgleichungen für die Rohrströmung in der Hydromechanik. Man kann die Gleichungen dimensionslos schreiben und findet wie in der Hydromechanik Ähnlichkeitsgesetze, die durch die Konstanz gewisser dimensionsloser Zahlen analog den REYNOLDS-Zahlen in der Hydromechanik charakterisiert sind. Man wird also auch erwarten, daß es für diese „REYNOLDS-Zahlen“ gewisse kritische Werte geben wird, oberhalb derer die Strömung der Elektronen in eine Art turbulente Strömung umschlägt. Wie bei der Rohrströmung die Turbulenz eine Erhöhung des Strömungswiderstandes bedeutet, wird hier die Turbulenz mit einer Erhöhung des Widerstandes, d. h. höheren Verlusten in der Entladung, verbunden sein. Die Analyse des vorliegenden Systems bezüglich der Stabilität gegenüber einer solchen Turbulenz wurde unter gewissen vereinfachenden Annahmen von KADOMTSEV¹⁸ durchgeführt. Dabei wurde von einer schraubenartigen Störung des Stromkanals ausgegangen. Die dadurch auftretende Azimutalkomponente des Stromdichtevektors

ergibt mit dem Magnetfeld bei einer rechtsgängigen Schraube eine $j \times B$ -Kraft. Diese trachtet die Störung zu vergrößern und treibt den Entladungskanal schließlich an die Rohrwand, wenn die Diffusion der Ladungsträger zur Wand, die die Störung aufzuheben trachtet, wegen der $1/B_z^2$ -Abhängigkeit des Diffusionskoeffizienten zu klein geworden ist, um die $j \times B$ -Kraft zu kompensieren. Es entsteht eine turbulente Entladung, die sich außer in höheren Verlusten in einem starken Rauschen äußern muß, dessen Frequenzen mit den Zeiten übereinstimmen sollten, die die LORENTZ-Kräfte brauchen, um die Teilchen bis an die Wand zu treiben³³.

Höherer Gasdruck und hohe Elektronentemperatur schwächen den Einfluß des Magnetfeldes, so daß man höhere Stabilität mit steigendem Druck p und höherer Temperatur T_e erwarten kann. Die Stabilitätskurve (vgl. Abb. 15) zeigt, daß die Entladung mit wachsendem $b_{e0} E_z$, also wachsender Driftgeschwindigkeit der Elektronen, instabiler werden sollte. Das ist ganz analog den Verhältnissen in der Rohrströmung: Je mehr Energie in der Strömung enthalten ist, um so größer ist das Energiereservoir für die Anfachung einer möglichen Störung.

Diese Turbulenztheorie liefert also eine kritische magnetische Feldstärke, deren Abhängigkeit von Gasdruck, Gasart und Rohrradius nachgeprüft werden kann. Sie liefert eine Aussage über die Frequenzen, die im instabilen Bereich auftreten sollten. Da es sich um eine makroskopische Störung in der Dichte handelt, müßte in dem Augenblick, in dem das kritische magnetische Feld erreicht wird, eine Spiralstruktur der Säule visuell zu beobachten sein. Solche Beobachtungen wurden mit Hilfe von Smeercameras von ALLEN^{10, 12-14} gemacht und es konnten Spiralstrukturen nachgewiesen werden, deren Wellenlänge gut zu den von der Theorie geforderten Werten paßt, womit diese Theorie eine starke Stütze gefunden hat.

Man kann andererseits versuchen, durch Eingriffe in die Entladung die Stabilität zu beeinflussen. Das Stabilitätskriterium sagt aus (vgl. Abb. 15), daß man die Entladung stabilisieren kann, wenn man die elektrische Feldstärke reduziert. Dies wird durch die zusätzliche HF-Ionisierung erreicht.

³³ Eine obere Abschätzung über die Frequenzen dieser Turbulenz erhält man, wenn man annimmt, daß die Azimutalkomponente des Stromes $j_\varphi = en v_\varphi$ nicht größer als der Axialstrom wird, der durch $j_z = en v_z = en b_{e0} E_z$ gegeben ist, also $v_\varphi < v_z = b_{e0} E_z$ [Steigung $< 45^\circ$, s. Bedingung a), Gl. (59)]. Die Azimutalkomponente des Stromes erzeugt

zusammen mit dem Magnetfeld eine Driftgeschwindigkeit in radialer Richtung $v_r \approx b_e v_\varphi B_z$, wobei b_e die radiale Beweglichkeit ist. Wegen $b_e \approx b_{e0}/b_{e0}^2 B_z^2$ für große B folgt $v_r < E_z/B_z$, also $\nu = 1/\tau \approx v_r/R < E_z/R B_z$. Für $R = 3 \cdot 10^{-2}$ m; $B_z = 0,1$ Vs/m², $E_z = 600$ V/m wird damit: $\nu < 2 \cdot 10^5$ s⁻¹.

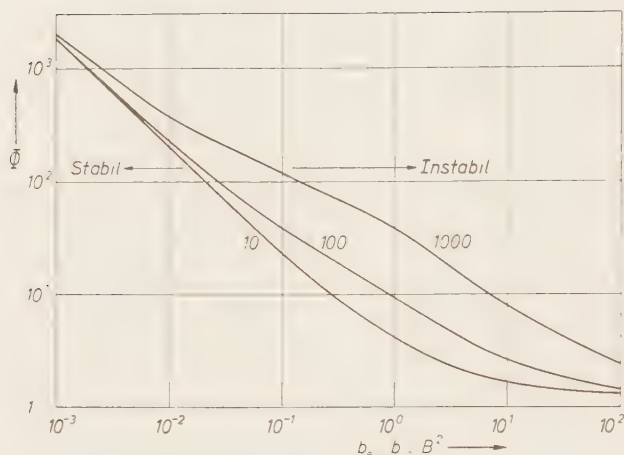


Abb. 15. Darstellung des Stabilitätskriteriums aus der Theorie von KADOMTSEV. $\Phi = f \cdot (b_{e0}/b_{i0}) \cdot (E_z R/T_e)$, $f = 0,163 e/24 k$, E_z = axiales elektrisches Feld, T_e = Elektronentemperatur, R = Rohrradius, b_{i0} , b_{e0} = Beweglichkeiten der Ionen bzw. Elektronen in z -Richtung, B_z = Magnetfeld; Kurvenparameter ist b_{e0}/b_{i0} .

Ein zusätzliches magnetisches Azimutalfeld in positiver φ -Richtung (d. h. das Feld ist in einem Rechtssystem mit B_z und E_z in positiver z -Richtung eine Rechtsschraube) erzeugt mit dem E_z -Feld eine Driftgeschwindigkeit aller Teilchen in Richtung auf die Achse hin. Man kann auch sagen: Entladungsstrom und Errege Strom des B_φ -Feldes sind parallel und ziehen einander an. Diese Drift wirkt der ambipolaren Diffusion entgegen. In der Turbulenztheorie ist aber der Trägerverlust zur Wand durch Diffusion einer der stabilisierenden Faktoren. (Man sieht das ein, wenn man bedenkt, daß jede Energie, die aus dem System abfließt, derjenigen Energie, die in die Störbewegung fließen kann, entzogen wird und daher zur Stabilisierung des Systems beiträgt.) Eine Drift zur Achse hin, die der Diffusion entgegenwirkt, muß daher eine destabilisierende Wirkung haben, und umgekehrt wirkt eine Drift nach außen stabilisierend.

7.2. Vergleich der Theorie von Kadomtsev mit den Experimenten. Die Druckabhängigkeit der kritischen magnetischen Feldstärke wurde mit dieser Theorie verglichen. Die theoretischen Werte von B wurden mit Hilfe der experimentellen Werte für E_z und T_e aus dem Stabilitätskriterium gewonnen und in Abb. 16 mit den Mittelwerten der experimentellen kritischen magnetischen Feldstärke-Werte verglichen. Es ergibt sich eine gute Übereinstimmung, wenn man für die Beweglichkeiten um Faktoren 3 niedrigere Werte als die der Datentabelle annimmt. Die Abhän-

gigkeit von der Ionenmasse ist unübersichtlich, da bei anderen Gasarten auch die veränderten Wirkungsquerschnitte für elastische Stöße, Ionisation und Anregung einen Einfluß auf die Elektronentemperatur und das elektrische Feld und damit auf die Stabilität haben.

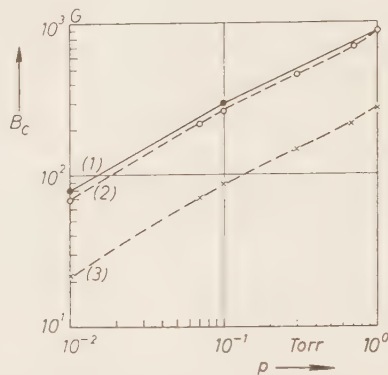


Abb. 16. Vergleich der kritischen magnetischen Feldstärke aus der KADOMTSEV-Theorie mit den gemessenen Werten. (1) gemessene Werte (Mittelwerte); (2) gerechnet für $b_{e0} \approx 30/p$, $b_{i0} \approx 0,2/p$; (3) gerechnet für $b_{e0} \approx 90/p$, $b_{i0} \approx 0,6/p$.

Als starke Stütze für die Theorie kann aber auch das anomale Verhalten des Stickstoffs betrachtet werden. Bei Stickstoffentladungen ist die axiale elektrische Feldstärke, verglichen mit derjenigen bei He, um etwa den Faktor 10 höher (vgl. KNOLL, OLLENDORFF und ROMPE^{33a}), und eine Abschätzung mit Hilfe der Stabilitätsbedingung führt darauf, daß die kritische magnetische Feldstärke für Stickstoff um den Faktor 2 unter der für Helium liegen sollte, was mit den Experimenten (LEHNERT^{7, 9}) gut übereinstimmt.

Die Aufnahmen des Rauschens, das in dem Moment des Einsetzens der Instabilität beobachtet wird, zeigen (vgl. Abschn. II. 1), daß es sich tatsächlich um sehr niederfrequente Schwingungen handelt, wie nach der Theorie zu erwarten ist.

In Abschnitt II. 4. (Abb. 8) wurde auf die stabilisierende Wirkung einer zusätzlichen HF-Ionisierung hingewiesen. Der Versuch, die experimentellen Werte mit der Theorie von KADOMTSEV in Übereinstimmung zu bringen, indem für die Elektronentemperaturen zunächst die gemessenen hohen Werte von 16 bis 20 eV eingesetzt wurden, schlug fehl. Die so berechneten Werte für die kritische magnetische Feldstärke lagen viel zu hoch. Setzt man statt dessen die normalen, ohne HF gemessenen Temperaturen ein,

33a M. KNOLL, F. OLLENDORFF u. R. ROMPE, Gasentladungstabellen, Springer-Verlag, Berlin 1935.

d. h. nimmt man an, daß durch die HF die Elektrentemperatur bis auf eine kleine Gruppe schneller Elektronen nicht wesentlich geändert wird, dann kommt man zu einer recht guten Übereinstimmung zwischen den theoretischen und den experimentellen Werten der kritischen magnetischen Feldstärke (vgl. Abb. 17).

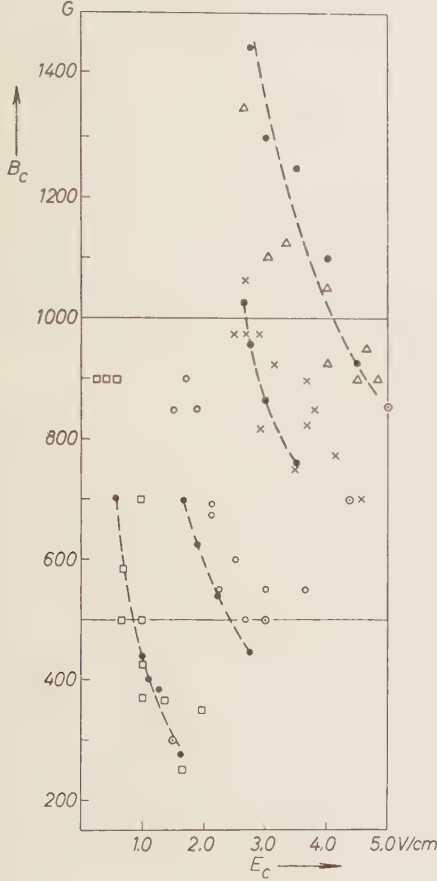


Abb. 17. Vergleich der kritischen magnetischen Feldstärke mit zusätzlicher HF-Ionisierung aus der Theorie von KADOMTSEV mit den gemessenen Werten.

● — — — ● gerechnet für $b_{e0} \approx 30/p$, $b_{i0} \approx 0,2/p$;

Meßpunkte	△	×	○	□
p (Torr)	$9 \cdot 10^{-1}$	$7 \cdot 10^{-1}$	$3,7 \cdot 10^{-1}$	10^{-1}

⊙ kritische Punkte ohne HF.

7.3. Positive Säule mit zusätzlichem magnetischen Azimutalfeld. Der Vergleich des Experiments mit zusätzlichem azimutalem magnetischem Feld, das durch einen isolierten Leiter in der Achse des Entladungsrohres erzeugt wird, mit der Theorie von KADOMTSEV ist nicht ohne weiteres möglich, solange die Stabilitätsbetrachtung nicht auf diese verallge-

meinerte Situation übertragen ist. Diese Erweiterung der Stabilitätsanalyse soll hier unternommen werden.

Bevor wir das System der Bewegungsgleichung für die Ladungsträger auf seine Stabilität untersuchen können, müssen wir die Lösung der Gleichgewichtsgleichungen kennen. Diese sind in dem vorliegenden Fall [vgl. Gl. (3), Abschn. III. 1.] :

$$b_{i0} \mathfrak{E} + b_{i0} [v_i \mathfrak{B}] - D_{i0} \frac{1}{n} \nabla n - v_i = 0, \\ -b_{e0} \mathfrak{E} - b_{e0} [v_e \mathfrak{B}] - D_{e0} \frac{1}{n} \nabla n - v_e = 0, \quad (32)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n v_{er}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n v_{ir}) = Z n, \\ v_{ir} = v_{er}, \quad \mathfrak{E} = -\text{grad } V.$$

Die auftretenden Vektoren haben in Zylinderkoordinaten jetzt die Komponenten:

$$\mathbf{r} = \{r, \varphi, z\}, \quad \mathbf{v}_e = \{v_{er}, v_{e\varphi}, v_{ez}\}, \quad \mathbf{v}_i = \{v_{ir}, v_{i\varphi}, v_{iz}\}, \\ \mathfrak{E} = \{E_r, 0, E_z\}, \quad \mathfrak{B} = \{0, B_\varphi, B_z\}, \quad \nabla n = \{\partial n / \partial r, 0, 0\}.$$

Die Koeffizienten haben wieder die Bedeutung:

$$b_{e0} = e / (m_e v_e), \quad b_{i0} = e / (m_i v_i), \\ D_{e0} = k T_e / (m_e v_e), \quad D_{i0} = k T_i / (m_i v_i).$$

Mit den gegenüber den in Abschn. III. 1. angegebenen, etwas veränderten Abkürzungen:

$$b_e = \frac{b_{e0}}{1 + b_{e0}^2 (B_\varphi^2 + B_z^2)}, \quad D_e = \frac{D_{e0}}{1 + b_{e0}^2 (B_\varphi^2 + B_z^2)}, \\ b_i = \frac{b_{i0}}{1 + b_{i0}^2 (B_\varphi^2 + B_z^2)}, \quad D_i = \frac{D_{i0}}{1 + b_{i0}^2 (B_\varphi^2 + B_z^2)} \quad (33)$$

erhält man aus diesem System für die radiale elektrische Feldstärke:

$$E_r = \frac{D_i - D_e}{b_i + b_e} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} - \frac{b_e b_{e0} - b_i b_{i0}}{b_i + b_e} E_z B_\varphi. \quad (34)$$

Für die radiale Geschwindigkeit der Ladungsträger erhält man schließlich:

$$v_{er} = v_{ir} = -D_a \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} - d E_z B_\varphi$$

mit

$$D_a = \frac{b_i D_e + b_e D_i}{b_e + b_i}, \quad d = \frac{b_i b_e (b_{i0} + b_{e0})}{b_e + b_i}. \quad (35)$$

Mit diesem Ausdruck für v_{er} geht man in die Kontinuitätsgleichung und erhält eine Differentialgleichung für $n(r)$. Da das azimutale Magnetfeld B_φ eine Funktion vom Radius ist:

$$B_\varphi = I/r, \quad (36)$$

da andererseits B_φ in den Koeffizienten b_e , b_i , D_e , D_i enthalten ist, würden diese Koeffizienten jetzt

selbst komplizierte Funktionen von r sein und die explizite Lösung der Differentialgleichung sehr komplizieren. Wir nehmen jetzt an, daß B_φ^2 verglichen mit B_z^2 sehr klein ist; dann können wir es in den Koeffizienten vernachlässigen und können mit konstanten Koeffizienten rechnen. Eine weitere Einschränkung wollen wir bezüglich E_z machen. E_z ist mit B_z variabel und hängt in komplizierter Weise über den Energiesatz mit den übrigen Parametern zusammen. Da aber E_z bei genügend hohen Drucken, und auf solche wollen wir uns beschränken ($p > 7 \cdot 10^{-1}$ Torr), mit B_z nur wenig veränderlich ist (weniger als 10%), können wir E_z als konstanten Entladungsparameter ansehen, der nur vom Gasdruck abhängt. Machen wir diese Einschränkung und setzen wir:

$$B_\varphi = I/r; \quad I = 2 \cdot 10^{-7} j \text{ (Amp)}; \quad (37)$$

$$Z/D_a = Q; \quad d E_z I/D_a = 2 \gamma,$$

dann erhalten wir für $n(r)$ die Kontinuitätsgleichung in der Form:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial r^2} + (1 + 2\gamma) \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial r} + Q n = 0. \quad (38)$$

Das ist eine BESSELSche Differentialgleichung mit der folgenden Lösung (siehe etwa JAHNKE-EMDE):

$$n(r) = N(r/R)^{-\gamma} Z_\gamma(\sqrt{Q} r). \quad (39)$$

N und R sind Normierungskonstanten, wobei wir R mit dem Rohrradius identifizieren wollen, γ kann positiv oder negativ sein, je nach Polung des axialen Leiterstromes, der das B_φ -Feld erzeugt. Als 1. Randbedingung benützen wir wieder die SCHOTTKYSche Randbedingung $n(R) = 0$. In diesem Fall genügt die Forderung der Regularität nicht als Randbedingung, um $Q^{1/2}$ festzulegen, wie in der einfachen

SCHOTTKYSchen Theorie, denn J_γ ist hier noch nicht die richtige Lösung. Für positive γ verschwindet $r^{-\gamma} J_\gamma$ an der Stelle $r=0$ nicht. In der Rohrachse befindet sich aber der isolierte Innenleiter mit einem Durchmesser von $a = 0,5$ cm, und die Teilchendichte muß bei $r=a$ verschwinden. Der Innenleiter kann nur vernachlässigt werden und die Dichte bei $r=0$ endlich angenommen werden, wenn $a \ll \lambda_e$ wäre, was bei einem Druck von 1 Torr, bei dem $\lambda_e \approx 10^{-2}$ cm, und bei $B = 1000$ G, wo $r_{\text{gyr}} \approx 10^{-3}$ cm ist, nicht zutrifft. Es muß daher mit der allgemeinen Lösung gerechnet werden:

$$n(r) = N(r/R)^{-\gamma} \{J_\gamma(\beta_\gamma r) + c_\gamma N_\gamma(\beta_\gamma r)\}. \quad (40)$$

Dabei sind J_γ und N_γ die BESSEL-Funktionen bzw. NEUMANN-Funktionen der Ordnung γ . Die Konstanten $\beta_\gamma = Q^{1/2}$ und c_γ sind jetzt aus den Randbedingungen $n(a) = 0$, $n(R) = 0$ bestimmbar, was auf die Relation führt:

$$J_\gamma(\beta_\gamma a) N_\gamma(\beta_\gamma R) - J_\gamma(\beta_\gamma R) N_\gamma(\beta_\gamma a) = 0. \quad (41)$$

Daraus ist β_γ als erste Nullstelle dieser Gleichung zu bestimmen. Die höheren Nullstellen interessieren hier nicht, weil dann Gebiete negativer Dichte zugelassen werden müssen, was aus physikalischen Gründen ausgeschlossen ist. c_γ bestimmt sich dann aus:

$$c_\gamma = -J_\gamma(\beta_\gamma a)/N_\gamma(\beta_\gamma a).$$

Die Lösungen der Gl. (41) sind in JAHNKE-EMDE bis zu $\gamma = 2,5$ tabelliert. Die Lösungskurven für die Dichteverteilung $n(r)$ sind Kurven, die wegen der Randbedingungen bei $r=a$ und $r=R$ den Wert Null und im Zwischenraum ein Maximum haben, das sich bei positiven γ mit zunehmendem γ zur Achse des Rohres hin, für negative γ nach außen verschiebt.

Nachdem die Lösung des Systems im Gleichgewicht bekannt ist, kann die Stabilität dieser Lösung untersucht werden. Dazu nehmen wir an den Größen der Gleichgewichtslösung kleine Variationen vor, indem wir schreiben:

$$v = v^{(0)} + v', \quad n = n^{(0)} + n', \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}^{(0)} + \mathfrak{E}', \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{(0)} + \mathfrak{B}', \quad (42)$$

wobei die mit Null indizierten Größen die Gleichgewichtsgleichungen erfüllen sollen, die gestrichenen Größen sind die Störgrößen. Es ist zu prüfen, ob es Lösungen des Systems der Bewegungsgleichungen gibt derart, daß die gestrichenen Größen exponentiell anwachsende Störungen sind. Die volle Bewegungsgleichung für die Teilchensorte s heißt jetzt [s. Gl. (3), Abschn. III. 1.]:

$$m_s n \{ (\partial v_s / \partial t) + (v_s \nabla) v_s \} = q_s n \{ \mathfrak{E} + [v_s \mathfrak{B}] \} - k T_s \nabla n - m_s v_s n v_s,$$

und die Kontinuitätsgleichung lautet: $(\partial n / \partial t) + \nabla (n v_s) = Z n.$

Für die ungestörten Größen gilt:

$$\partial v_s^{(0)} / \partial t = 0, \quad \partial n^{(0)} / \partial t = 0, \quad m_s n (v_s^{(0)} \nabla) v_s^{(0)} \ll k T_s \nabla n^{(0)},$$

$$q_s n^{(0)} \{ \mathfrak{E}^{(0)} + [v_s^{(0)} \mathfrak{B}] \} - k T_s \nabla n^{(0)} - m_s v_s n^{(0)} v_s^{(0)} = 0$$

(hierbei ist schon vorausgesetzt, daß $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{(0)}$ ist, d. h. das Feld ist von außen angelegt und konstant. Wir werden diese Voraussetzung auch weiterhin beibehalten).

Für die Störungsrechnung machen wir nun die übliche Linearisierung, d. h. Terme, die in den Störgrößen quadratisch sind, werden unterdrückt. Weiter werden wir uns wie üblich auf die Methode der sogenannten Normalschwingungen beschränken, d. h. wir machen für die Störgrößen einen in z , φ und t periodischen Ansatz, da die Stabilität gegen solche Störungen das System ausreichend charakterisiert. Wir setzen:

$$n' = \xi(r) \exp \{i m \varphi + i k z - i \omega t\}, \quad \mathfrak{E}' = -\text{grad } V'; \quad V' = \eta(r) \exp \{i m \varphi + i k z - i \omega t\}, \quad (43)$$

entsprechend für die anderen Größen.

Wir führen zunächst die Linearisierung durch und erhalten:

$$\begin{aligned} m_s n^{(0)} \left\{ -\frac{\partial v_s'}{\partial t} + (v_s^{(0)} \nabla) v_s' + (v_s' \nabla) v_s^{(0)} \right\} \\ = q_s n^{(0)} \{ \mathfrak{E}' + [v_s' \mathfrak{B}] \} + q_s n' \{ \mathfrak{E}^{(0)} + [v_s^{(0)} \mathfrak{B}] \} - k T_s \nabla n' - m_s v_s n^{(0)} v_s' - m_s v_s n' v_s^{(0)}; \quad (44) \\ \partial n' / \partial t + \nabla \{ n^{(0)} v_s' + n' v_s^{(0)} \} = Z n'. \end{aligned}$$

Wir machen nun die folgenden weiteren Annahmen, die die Behandlung des Problems erheblich vereinfachen (siehe KADOMTSEV¹⁸):

(a) Wegen der niedrigen Frequenzen, die bei den Rauschmessungen gefunden wurden, beschränken wir uns auf solche Vorgänge, die mit niedrigen Frequenzen ablaufen. Bei der periodischen Störung wird

$$\partial v_s' / \partial t = -i \omega v_s' \quad \text{und} \quad \partial n' / \partial t = -i \omega n',$$

wobei ω die Frequenz der Störbewegung ist. Wir vergleichen den Term $\partial v_s' / \partial t$ mit $v_s v_s'$ und sehen, daß $\partial v_s' / \partial t$ vernachlässigt werden darf, wenn $\omega \ll v_s$ ist. Diese Bedingung ist für $p > 10^{-1}$ Torr erfüllt ($v_e > 10^8$, $v_i > 10^6$, $\omega \approx 10^4$). In der Kontinuitätsgleichung ist aber $\partial n' / \partial t = -i \omega n'$ mit $Z n'$ zu vergleichen und nicht vernachlässigbar ($Z \approx 10^4$).

(b) Wir nehmen an, daß auch die anderen Trägheitsterme vernachlässigt werden dürfen. Wenn wir annehmen, daß sich die Geschwindigkeiten nur über Längen merklich ändern, die vergleichbar mit dem Rohrradius R sind, dann dürfen wir abschätzen:

$$(v_s^{(0)} \nabla) v_s' \approx (v_s' \nabla) v_s^{(0)} \approx v_s^{(0)} (1/R) v_s' \leq (\bar{v}_{s, \text{th.}} / R) v_s' = v_s (\lambda_s / R) v_s'.$$

Wir können diesen Term vergleichen mit dem Term $v_s v_s'$ und sehen, daß sie unter der Annahme $\lambda_s \ll R$ vernachlässigt werden dürfen. In den Fällen, in denen die freie Weglänge λ_s mit dem Rohrradius vergleichbar ist, haben wir den Term

$$(v_s^{(0)} \nabla) v_s' \approx v_s^{(0)} (1/\lambda_s) v_s' \leq (\bar{v}_{s, \text{th.}} / \lambda_s) v_s' = v_s v_s'$$

mit dem Term $(q_s/m_s) v_s' \mathfrak{B} = \omega_s v_s'$ zu vergleichen.

Wir dürfen den Trägheitsterm vernachlässigen, wenn $\omega_s \gg v_s$ ist. Die Tabelle zeigt, daß damit die Vernachlässigung der Trägheitsterme in allen Fällen $p > 10^{-1}$ Torr bzw. $B > 0,01$ Vs/m² erlaubt ist.

(c) Wir nehmen an, daß die Bewegung der Ionen im wesentlichen durch das elektrische Feld bestimmt wird und vernachlässigen den Diffusionsterm und den magnetischen Term. Eine Größenordnungsabschätzung für die Geschwindigkeiten zeigt, daß dies in den uns interessierenden Druckbereichen von $p > 7 \cdot 10^{-1}$ Torr erlaubt ist. Man kann nämlich die Impulserhaltungsgleichung für $v_s = v_s^{(0)} + v_s'$, wenn man die Vernachlässigungen macht, die in (a) und (b) begründet wurden, nach $n v_e$ auflösen und erhält, wenn man jetzt wieder Beweglichkeiten und Diffusionskoeffizienten einsetzt:

$$n v_e = -b_e n \mathfrak{E} - D_e \nabla n + b_e b_{e0} n [\mathfrak{E} \mathfrak{B}] - b_e b_{e0}^2 n (\mathfrak{E} \mathfrak{B}) \mathfrak{B} - b_e b_{e0} D_{e0} (\mathfrak{B} \nabla n) \mathfrak{B} + b_e D_{e0} [\nabla n \mathfrak{B}], \quad (45)$$

eine entsprechende Gleichung für die Ionen. Für die Ionen ist in dem betrachteten Druck- und Magnetfeldbereich $b_{i0} B \ll 1$. Damit sind in der Ionengleichung auf der rechten Seite der dritte und vierte Term gegen den ersten, der fünfte und sechste gegen den zweiten vernachlässigbar. Es ist $b_i \approx b_{i0}$, $D_i \approx D_{i0}$.

Nach Gl. (34) ist für $B_\varphi = 0$

$$E_r \approx \frac{D_e}{b_e} \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} = \frac{D_{e0}}{b_{e0}} \frac{1}{n} \nabla n.$$

Es ist also $b_{i0}(D_{c0}/b_{c0})$ mit D_{i0} zu vergleichen und man sieht (Tab. 1), daß auch der Term $D_{i0} \nabla n$ vernachlässigbar ist. Wir dürfen annehmen, daß das B_y -Feld nur eine kleine Änderung bringt. Das System der Störgleichungen erhalten wir nun, wenn wir die Geschwindigkeiten mittels der Impulsgleichungen aus den Kontinuitätsgleichungen eliminieren. Man erhält:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n'}{\partial t} - Z n' + b_{i0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n^0 E_r' + r n' E_r^0) + b_{i0} \frac{n^0}{r} \frac{\partial E_\varphi'}{\partial \varphi} + b_{i0} n^0 \frac{\partial E_z'}{\partial z} + b_{i0} E_z^0 \frac{\partial n'}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial n'}{\partial t} - Z n' - b_e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n^0 E_r' + r n' E_r^0) - D_e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n'}{\partial r} \right) - b_e b_{e0} E_z^0 B_\varphi \frac{\partial n'}{\partial r} \\ - b_e E_r^0 \frac{\partial n'}{\partial z} (1 + b_{e0}^2 B_z^2) - D_e \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 n'}{\partial \varphi^2} - D_e (1 + b_{e0}^2 B_z^2) \frac{\partial^2 n'}{\partial z^2} \\ + b_e b_{e0} E_r^0 \left(B_\varphi \frac{\partial n'}{\partial z^2} - \frac{B_z}{r} \frac{\partial n'}{\partial \varphi} \right) - b_e b_{e0} E_z^0 \frac{B_z B_\varphi}{r} \frac{\partial n'}{\partial \varphi} - b_e \frac{n^0}{r} \frac{\partial E_\varphi'}{\partial \varphi} \\ - b_e b_{e0} D_{e0} \left(\frac{B_\varphi^2}{r^2} \frac{\partial^2 n'}{\partial \varphi^2} + \frac{2 B_\varphi B_z}{r} \frac{\partial^2 n'}{\partial \varphi \partial r} \right) - b_e n^0 (1 + b_{e0}^2 B_z^2) \frac{\partial E_z'}{\partial z} \\ + b_e b_{e0} \frac{\partial n^0}{\partial r} (E_\varphi' B_z - E_z' B_\varphi) - b_e b_{e0} n^0 \left(\frac{B_\varphi^2}{r^2} \frac{\partial E_\varphi'}{\partial \varphi} + \frac{B_y B_z}{r} \frac{\partial E_z'}{\partial \varphi} + B_y B_z \frac{\partial E_\varphi'}{\partial z} \right) = 0. \end{aligned}$$

Machen wir jetzt den periodischen Ansatz für die Störgrößen n' und $\mathcal{E}'$ bzw. V' und benutzen wir weiter die Annahme, die in den von uns betrachteten Fällen immer erfüllt ist, daß $b_{e0}^2 B_z^2 \gg 1$ ist, dann erhält man:

$$\begin{aligned} (i b_{i0} k E_z^0 - i \omega - Z) n' + b_{i0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n' E_r^0 + r n^0 E_r') + b_{i0} \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) n^0 V' = 0, \\ - b_e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n^0 E_r' + r n' E_r^0) - D_e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n'}{\partial r} \right) - b_e b_{e0} E_z^0 I \frac{1}{r} \frac{\partial n'}{\partial r} \\ + n' (-i \omega - Z - i k b_{e0} E_z^0 + D_{e0} k^2) + \frac{n'}{r^2} \left(D_e m^2 + 2 D_{e0} m k \frac{I}{B_z} - i m b_{e0} E_z^0 \frac{I}{B_z} \right) \\ + i \frac{E_r^0}{B_z} \left(\frac{I}{B_z} k - m \right) \frac{n'}{r} + \frac{n'}{r^4} D_{e0} m^2 \frac{I^2}{B_z^2} - b_{e0} n^0 k^2 V' \\ - b_e (m^2 + 2 b_{e0}^2 B_z m k I) \frac{n^0}{r^2} V' + i \frac{V'}{r} \frac{\partial n^0}{\partial r} \frac{1}{B_z} \left(\frac{I}{B_z} k - m \right) - b_e b_{e0} n^0 m^2 \frac{I^2}{r^4} V' = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Für $I=0$, d. h. ohne magnetisches Azimutalfeld, ist dieses System identisch mit den Gln. (8) und (9) in der Arbeit von KADOMTSEV¹⁸. Das Gleichungssystem ist linear in den Störgrößen n' und V' und stellt also ein lineares Differentialgleichungssystem für die Funktionen $\xi(r)$ und $\eta(r)$ dar, das ein Eigenwertproblem definiert. Die Lösung des Eigenwertproblems ist wegen der Kompliziertheit der Funktionen n^0 und E^0 sicher sehr verwickelt. Wir begnügen uns mit einer einfachen Näherung, indem wir wie KADOMTSEV für die gesuchten Funktionen n' und V' plausible Ansätze machen

$$\xi(r) = \bar{n} \Psi^{(0)}(r); \quad \eta(r) = \bar{V} \Psi^{(0)}(r), \quad (48)$$

wobei wir annehmen, daß diese Funktionen den wahren Eigenfunktionen des Systems nahe kommen.

Das Eigenwertproblem hat die Gestalt:

$$T \Psi - \omega \Psi = 0, \quad (49)$$

wobei T den Differentialoperator repräsentiert. Kennt man Funktionen $\Psi^{(0)}$, die das System näherungsweise lösen, dann erhält man Näherungswerte der Eigenwerte aus der Forderung, daß das Quadrat der Abweichungen^{34, 35}

$$D = T \Psi^{(0)} - \omega^{(0)} \Psi^{(0)} \quad (50)$$

ein Minimum werden soll in der Form:

$$\omega^{(0)} = \int \Psi^{(0)*} T \Psi^{(0)} d\tau. \quad (51)$$

Setzen wir also die gewählte Näherungsfunktion in unser Gleichungssystem (47) ein, multiplizieren nochmals mit der Näherungslösung und integrieren

³⁴ Es ist $D^2 = \int D D^* d\tau$, da D im Falle nichthermitescher Operatoren komplex sein kann. Man hat dann, um das Extremum aufzusuchen, die Variation von

$$\int ((T - \omega^{(0)})^* \Psi^{(0)*}) (T - \omega^{(0)}) \Psi^{(0)} d\tau$$

zu bilden. Dabei kann, statt nach Real- und Imaginärteil

von $\omega^{(0)}$ zu variieren, nach $\omega^{(0)}$ und $\omega^{(0)*}$ variiert werden. Variation nach $\omega^{(0)*}$ ergibt:

$$\int \Psi^{(0)*} (T - \omega^{(0)}) \Psi^{(0)} d\tau = 0.$$

Sind die $\Psi^{(0)}$ normiert, so folgt (51).

³⁵ Diese Näherungsmethode wurde von KADOMTSEV benutzt.

bezüglich r zwischen den Rändern, dann erhalten wir ein lineares homogenes Gleichungssystem für die konstanten Amplituden der Näherungslösung. Dieses Gleichungssystem ist nicht trivial lösbar, wenn die Koeffizientendeterminante identisch verschwindet. Dieses liefert uns die Dispersionsrelation, die man nach den Eigenwerten $\omega^{(0)}$ auflösen kann. Da das System nicht hermitesch ist, können die Eigenwerte komplex sein. Wir interessieren uns für den Imaginärteil der Frequenz, d. h. für exponentiell an- oder abklingende Störungen. Wegen

$$n'(r) = \xi(r) \exp \{i m \varphi + i k z - i(\alpha + i\beta) t\} \\ = \xi(r) e^{i m \varphi + i k z} e^{-i \alpha t} e^{\beta t} \quad (52)$$

haben wir es mit stabilen, exponentiell abklingenden Störungen zu tun, wenn $\beta < 0$, und wir erhalten als Stabilitätskriterium:

$$\Im \omega < 0. \quad (53)$$

Als Näherungslösungen für die Eigenfunktionen haben wir solche zu wählen, die zumindest die Randbedingungen erfüllen, d. h. Funktionen, die bei $r = a$ und $r = R$ verschwinden. Wir nennen diese Funktion jetzt:

$$\Psi^{(0)} = \Phi_\lambda(\tau_\lambda r),$$

Wir erhalten nun das folgende lineare Gleichungssystem für die Amplituden:

$$\begin{aligned} \bar{N} \left\{ (-i\omega - Z + i b_{i0} k E_z^0) \frac{\psi_1}{\tau_\gamma^2} - \frac{b_{i0} b_{e0}}{1 + b_{i0} b_{e0} B^2} E_z^0 I \psi_3 + \frac{b_{i0} (D_{i0} b_{e0}^2 - D_{e0} b_{i0}^2) B^2 - D_{e0}}{b_{e0} (1 + b_{i0} b_{e0} B^2)} \psi_2 \right\} \\ + \bar{V} \left\{ -b_{i0} \psi_6 + b_{i0} m^2 \psi_5 + \frac{b_{i0} k^2}{\tau_\gamma^2} \psi_4 \right\} = 0, \\ \bar{N} \left\{ -b_e \psi_2 \frac{(D_{i0} b_{e0}^2 - D_{e0} b_{i0}^2) B^2 - D_{e0}}{b_{e0} (1 + b_{i0} b_{e0} B^2)} - b_e \psi_3 \frac{b_{i0} b_{e0}}{1 + b_{i0} b_{e0} B^2} E_z^0 I - D_e \psi_7 \right. \\ - b_e b_{e0} E_z^0 I \psi_3 + \frac{1}{\tau_\gamma^2} (-i\omega - Z - i k b_{e0} E_z^0 + D_{e0} k^2) \psi_1 \\ + \left(D_e m^2 - i m b_{e0} E_z \frac{I}{B} + 2 D_{e0} m k \frac{I}{B} \right) \psi_3 - \frac{i}{B} \left(\frac{I}{B} k - m \right) \frac{b_{i0} b_{e0}}{1 + b_{i0} b_{e0} B^2} E_z^0 I \psi_8 \\ + \frac{i}{B} \left(\frac{I}{B} k - m \right) \frac{(D_{i0} b_{e0}^2 - D_{e0} b_{i0}^2) B^2 - D_{e0}}{b_{e0} (1 + b_{e0} b_{i0} B^2)} \psi_9 + \tau_\gamma^2 b_{e0} b_e D_{e0} I^2 m^2 \psi_{11} \left. \right\} \\ + \bar{V} \left\{ b_e \psi_6 - \frac{b_{e0} k^2}{\tau_\gamma^2} \psi_4 - b_e (m^2 + 2 m k b_{e0}^2 I B) \psi_5 + \frac{i}{B} \left(\frac{I}{B} k - m \right) \psi_{10} \right. \\ \left. - \tau_\gamma^2 b_e b_{e0} I^2 m^2 \psi_{12} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (58)$$

Die Größen ψ_i darin sind gewisse Integrale über Produkte der Funktionen $\Phi_\lambda \Phi_\gamma$ sowie deren Ableitungen.

Wir machen nun noch folgende Vereinfachungen, die auf Grund einer Abschätzung der einzelnen Glieder in dem Druckbereich $p > 7 \cdot 10^{-1}$ Torr erlaubt sind:

$$\begin{aligned} a) \quad m^2 &\gg k^2 / \tau_\gamma^2, \\ b) \quad (I/B) k &\ll m; \quad \text{und} \\ c) \quad \tau_\gamma^2 b_e b_{e0} D_{e0} I^2 m^2, \quad \tau_\gamma^2 b_{e0} b_e I^2 m^2 \end{aligned} \quad (59)$$

wobei τ_λ und λ die Funktion näher charakterisierenden Parameter sind. Eine physikalisch plausible Näherung wird eine Funktion sein, die der Gleichgewichtslösung der Dichtefunktion verwandt ist, also z. B.:

$$^{(1)}\Phi_\lambda(\tau_\lambda r) = (\tau_\lambda r)^\lambda \{J_\lambda(\tau_\lambda r) + c_\lambda N_\lambda(\tau_\lambda r)\}, \quad (54)$$

wobei $\tau_\lambda = \beta_\lambda$ und c_λ aus den Randbedingungen zu bestimmen sind, während die Ordnung λ noch frei verfügbar ist. Ein ähnliches Verhalten hat auch die Funktion:

$$^{(2)}\Phi_\lambda(\tau_\lambda r) = (\tau_\lambda r)^\lambda \sin \tau_\lambda (r - a) \cos \tau_\lambda r \quad (55)$$

mit $\tau_\lambda = \pi/2 R$. Dieser Ansatz läßt sich numerisch leichter behandeln.

Die in (47) noch auftretende ungestörte Dichteverteilung $n(r)$ kann ebenfalls durch eine Funktion

$$n^0(r) \approx N^0 \quad ^{(2)}\Phi_\gamma(\tau_\gamma r) \\ = N^0 (\tau_\gamma r)^{-\gamma} \sin(r - a) \tau_\gamma \cos \tau_\gamma r \quad (56)$$

angenähert werden, die der richtigen Lösung

$$n^0(r) = N^0 \quad ^{(1)}\Phi_\gamma(\tau_\gamma r) \\ = N^0 (r \beta_\gamma)^{-\gamma} \{J_\gamma(\beta_\gamma r) + c_\gamma N_\gamma(\beta_\gamma r)\} \quad (57)$$

im betrachteten Bereich nahe kommt.

seien vernachlässigbar gegen die anderen Glieder in Gl. (47).

Die Bedingung a) ist gleichbedeutend mit der Annahme, daß die Wellenlänge λ der Störung groß sei gegen den Rohrradius. Die Bedingung c) verlangt, daß die Steigung der Störung $\lambda/2\pi r$ klein sei gegen die Steigung der Magnetfeldlinien $\tan \alpha =$

B_z/B_φ . Wenn diese beiden Bedingungen erfüllt sind, dann ist b) automatisch erfüllt.

Mit diesen Vereinfachungen erhält man, nach Auflösen der Determinante des Systems (58) nach ω und Abspalten des Imaginärteiles, als Stabilitätsrelation:

$$F(\xi \eta) = C_0 + C_1 \xi + C_2 \xi^2 + D_1 \xi \eta + D_2 \xi^2 \eta + D_3 \xi^3 \eta + D_4 \xi^4 \eta^2 > 0. \quad (60)$$

$$\text{Hierin bedeuten } \xi = X/V, \quad \eta = V^2, \quad X = k b_{e0} B_z / \tau_\gamma, \\ V = b_{e0} E_z^{(0)} / (D_{e0} \tau_\gamma), \quad y^2 = b_{e0} b_{i0} B_z^2. \quad (61)$$

Die Koeffizienten C_i und D_i sind gewisse Funktionen $C_i(y, \psi_k, m, \gamma)$, $D_i(y, \varphi_k, m, \gamma)$. Die Größe ξ repräsentiert im wesentlichen die Wellenzahl der angenommenen Störung, η die elektrische Feldstärke in der Entladung, y die magnetische Feldstärke. Für einen vorgegebenen Wert y und feste Parameter γ und m sind die Koeffizienten der Relation (58) feste Größen. Für feste Koeffizienten ist die Frage, ob es Werte ξ und η gibt, die die linke Seite der Stabilitätsrelation negativ machen. Die Stabilitätsgrenze ist definiert durch die Schnittkurve der $F(\xi \eta)$ -Fläche mit der ξ - η -Ebene. Von dieser Schnittkurve interessiert uns der Punkt, der zu dem niedrigsten Wert der Größe η gehört. Wir verlangen also außerdem:

$$\partial F(\xi \eta) / \partial \xi = 0. \quad (62)$$

Damit haben wir zwei unabhängige Relationen, um die Grenze der Stabilität bestimmen zu können. Da F vom 4. Grad in ξ und vom 2. Grad in η ist, können 6 Lösungen auftreten. Physikalisch von Interesse sind nur die reellen Lösungen, und von diesen gibt diejenige mit dem niedrigsten positiven Wert von η die Stabilitätsgrenze. Diese Lösung ist für jeden Wert von y durchzuführen, und man erhält als Stabilitätsgrenze eine Kurve in der η - y -Ebene. Variiert man nun γ und m , so erhält man eine zweiparametrische Kurvenschar in der η - y -Ebene. Die Variation von γ gibt die Abhängigkeit der Stabilitätsgrenze von dem Erregerstrom für das Azimutalfeld. Bezüglich des Parameters m folgert man aus dem anschaulichen Bild der Störung, daß solche mit $m > 0$ stabil sein müssen. Nur für $m < 0$ kann es instabile Lösungen geben. Die linke Seite der Stabilitätsrelation ist für große Werte von m proportional zu $a m^6$, wobei a positiv ist. Für große m ist das System stets stabil. Wir können vermuten, daß $m = -1$ den instabilsten Fall gibt.

Die Ermittlung der durch $F(\xi \eta) = 0$ und $\partial F / \partial \xi = 0$ definierten Stabilitätsgrenze und ihre

Darstellung als Kurve in der η - y -Ebene mit γ als Parameter erforderte erheblichen Rechenaufwand, der mit der elektronischen Rechenmaschine G 3 bewältigt wurde. Das Ergebnis ist für die Parameter $\gamma = -1, 0$ und $+1$ in Abb. 18 dargestellt. Die Stabilität ist im Falle $\gamma = 0$ etwas höher als die aus der KADOMTSEVSKEN Theorie folgende. Das hat seinen

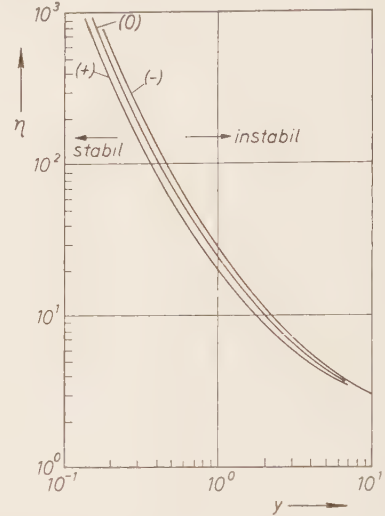


Abb. 18. Stabilitätsgrenze mit zusätzlichem magnetischem Azimutalfeld. $\eta = [b_{e0} E_z^{(0)} / (D_{e0} \tau_\gamma)]^2$, $y = B_z \sqrt{b_{i0} b_{e0}}$, $\gamma = d E_z^{(0)} I / D_a$. (—) Kurve für $\gamma = -1$, (---) Kurve für $\gamma = 0$, (+) Kurve für $\gamma = +1$.

Grund in der stabilisierenden Wirkung des Innenleiters. Für die Verhältnisse bei $p = 1,2$ Torr erhält man aus diesen Rechnungen eine Änderung der kritischen magnetischen Feldstärke von $\Delta B_c / \Delta j \approx 100$ G pro 400 A, was mit dem experimentellen Ergebnis in Abb. 10 recht gut übereinstimmt.

IV. Schlußfolgerungen

Die wichtigsten Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen zu dieser Arbeit können wie folgt zusammengefaßt werden:

1. In der positiven Säule einer Niederdruckentladung in einem longitudinalen Magnetfeld wurden die Trägerverluste aus der Entladung zur Wand durch Messung der axialen elektrischen Feldstärke in Abhängigkeit von der magnetischen Feldstärke bestimmt und dabei die zuerst von LEHNERT beschriebene Erscheinung reproduziert, daß oberhalb einer kritischen magnetischen Feldstärke die Verluste, entgegen der Diffusionstheorie der Säule, wieder ansteigen.

2. Es wurde die radiale Potentialverteilung in der Entladung in Abhängigkeit vom Magnetfeld gemessen. Dabei zeigte sich, daß die mittlere radiale elektrische Feldstärke mit zunehmendem Magnetfeld abnimmt, wie nach der Säulentheorie erwartet, und daß sie oberhalb der kritischen magnetischen Feldstärke wieder zunimmt. Bei Gasdrucken $p > 3 \cdot 10^{-1}$ Torr zeigt die radiale elektrische Feldstärke bei hohen Magnetfeldern keine Richtungsumkehr. Bei niedrigeren Drucken wird eine Radialfeldumkehr beobachtet.

3. Es wurde durch Einkoppeln von HF-Leistung in die Entladung eine zusätzliche HF-Ionisierung erzeugt und dadurch ein Entladungstyp geschaffen, der es erlaubt, bei gleichem Entladungsstrom mit einer kleineren axialen elektrischen Feldstärke auszukommen. Es wurde der Einfluß dieser Verminderung der axialen elektrischen Feldstärke auf die kritische magnetische Feldstärke untersucht und gefunden, daß eine Verminderung der elektrischen Feldstärke eine starke stabilisierende Wirkung hat.

4. Es wurde durch Einbringen eines isolierten Leiters in die Achse der Entladung ein zusätzliches azimuthales magnetisches Feld erzeugt und dessen Einfluß auf die kritische magnetische Feldstärke studiert. Es zeigte sich eine stabilisierende Wirkung in dem Fall, in dem das magnetische Azimutalfeld so orientiert war, daß es zusammen mit dem elektrischen Axialfeld eine Drift der Träger nach außen erzeugt. Drift nach innen wirkte destabilisierend.

Diese experimentellen Ergebnisse wurden benutzt, um sechs verschiedene Hypothesen zur Deutung des Phänomens zu untersuchen.

1. Es wurde die Frage untersucht, ob ein Zusammenhang besteht zwischen der kritischen magnetischen Feldstärke und dem Umschlagen der radialen elektrischen Feldstärke, d. h. dem Überwiegen der Ionendiffusion gegenüber der Diffusion der Elektronen. Diese Möglichkeit konnte durch die Messung der radialen Potentialverteilung mindestens für höhere Drucke, bei denen kein Radialfeldumschlag bei der kritischen magnetischen Feldstärke auftritt, ausgeschlossen werden.

2. Es wurde die Möglichkeit untersucht, ob das Phänomen zusammenhängt mit einer Aufhebung der Zylindersymmetrie in der Entladung, die bei höheren Magnetfeldern infolge Bevorzugung der Elektronenbewegung längs der magnetischen Feldlinien eintritt und eine Art „Kurzschluß“ der radialen elek-

trischen Feldstärke bedeuten würde. Es wurde eine Kurzschlußbedingung angegeben, die auf kritische magnetische Feldstärken führt, die in der Größenordnung der gemessenen liegen. Diese Deutungsmöglichkeit scheidet praktisch aber aus, weil sie keine Erklärung für das sprunghafte Ansteigen der Verluste bei der kritischen Feldstärke geben kann.

3. Es wurde die Hohlische Theorie untersucht, die das Phänomen als Folge der Verletzung der BOHM-schen Bedingung für die Existenz einer positiven Raumladungsschicht an der Plasmabegrenzung bei höheren Magnetfeldern deutet. Bei dem Versuch, die Meßergebnisse mit zusätzlicher HF-Ionisierung mit dieser Theorie quantitativ zu deuten, wird man zu widersprüchlichen Annahmen über die Verhältnisse in der Nähe der Schichtgrenze geführt. Die Voraussage der Theorie, daß die kritische magnetische Feldstärke bei höheren Gasdrucken wieder abnehmen und gegen Null gehen sollte, konnte wegen experimenteller Schwierigkeiten nicht widerlegt werden. Das anomale Verhalten des Stickstoffs kann diese Theorie nicht erklären.

4. Es wurde die Möglichkeit untersucht, das Phänomen als Folge einer Ionenwelleninstabilität zu deuten, herrührend entweder von der mittleren Driftgeschwindigkeit aller Elektronen in dem axialen elektrischen Feld oder von Run-away-Elektronen. Run-away-Elektronen konnten ausgeschlossen werden, weil ihre Zahl verschwindend gering ist. An Hand der Messungen über die Abhängigkeit der Elektronentemperatur von der magnetischen Feldstärke konnte gezeigt werden, daß das Verhältnis von Driftgeschwindigkeit zu thermischer Geschwindigkeit der Elektronen, das entscheidend für das Auftreten einer Ionenwelleninstabilität ist, sich mit dem Magnetfeld nicht kritisch ändert, so daß man diese Deutungsmöglichkeit ebenfalls ausschließen kann.

5. Sowohl die Druckabhängigkeit der kritischen magnetischen Feldstärke als auch die Ergebnisse der Beeinflussung der kritischen magnetischen Feldstärke durch eine zusätzliche HF-Ionisierung oder ein zusätzliches magnetisches Azimutalfeld sind mit der Theorie von KADOMTSEV, die das Phänomen als eine turbulenzartige Instabilität des Plasmas deutet, so gut verträglich, daß mit diesen Experimenten der Beweis erbracht zu sein scheint, daß diese Theorie die zutreffende Beschreibung für das Phänomen ist.

Für weitere Gebiete der Plasmaphysik scheint dieses Ergebnis wichtig wegen der daraus zu ziehenden

Folgerung, daß Anordnungen, in denen Magnetfeld und beträchtliche elektrische Felder oder Driftgeschwindigkeiten einer Teilchensorte parallel sind, anfällig für diese Art von turbulenzartigen Instabilitäten sein werden.

Diese Arbeit wurde im Max-Planck-Institut für Physik durchgeführt. Herrn Professor W. HEISENBERG danke ich für die Aufnahme in das Institut. Besonders danke

ich Herrn Dr. G. v. GIERKE für sein förderndes Interesse am Fortgang der Arbeit und für manche anregende Diskussion. Herrn Professor A. SCHLÜTER danke ich für kritische Durchsicht der Arbeit. Herrn Dr. G. MÜLLER bin ich für die Unterstützung bei der Messung der Geschwindigkeitsverteilung dankbar. Herrn D. ANTRACK danke ich für die Programmierung und die Durchführung der numerischen Rechnungen auf der G 3 und Herrn E. GRIMM schließlich danke ich für die Glasbläserarbeiten.

Curriculum vitae

Der Verfasser dieser Arbeit, KARLHEINZ WÖHLER, wurde am 5. 6. 1930 in Berlin geboren. Er besuchte die Grundschule in Köln, während und nach dem 2. Weltkrieg das humanistische Gymnasium in Waldbröl im Rheinland, wo er Ostern 1950 das Zeugnis der Reife erhielt. Im Sommer-Semester 1950 begann er das Studium der Naturwissenschaften mit dem Hauptfach Physik an der Universität Bonn. 1953 setzte er sein Studium an der Technischen Hochschule in Aachen fort und schloß es 1955 zunächst mit der Diplom-Hauptprüfung ab. Von 1955 bis 1959 war er in dem nachrichtentechnischen Entwicklungslaboratorium der Siemens & Halske A.G. tätig. Seit 1959 ist er wissenschaftlicher Mitarbeiter des Max-Planck-Instituts für Physik und Astrophysik, wo er in der Abteilung für experimentelle Plasmaphysik mit Untersuchungen über Diffusionsvorgänge im Plasma beschäftigt ist. Aus diesen Untersuchungen ist die vorgelegte Arbeit hervorgegangen.

